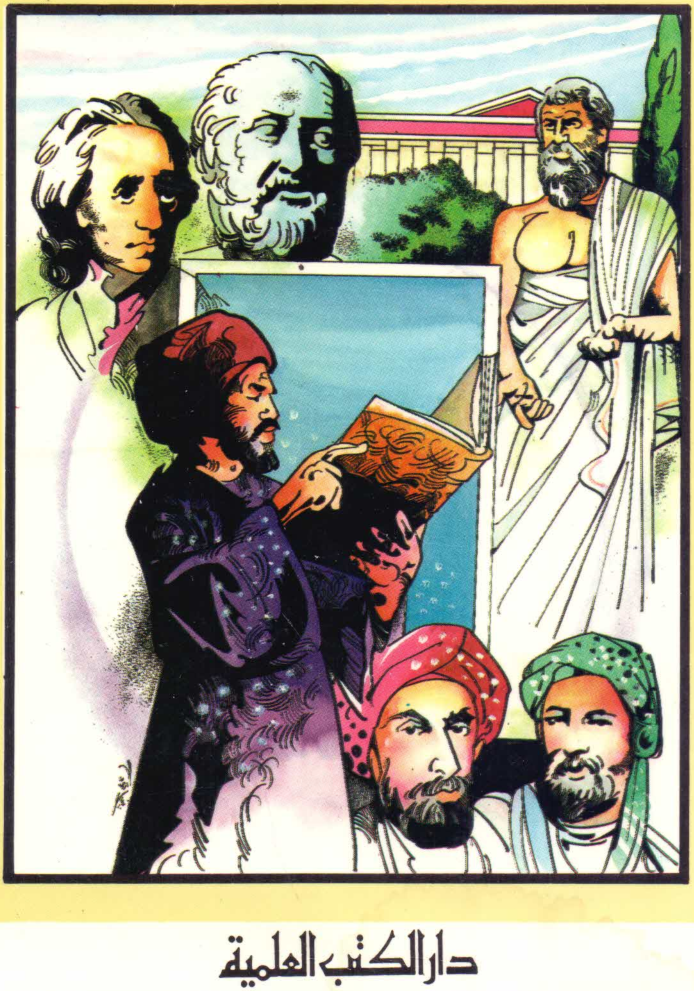
الأعلام من الفلاسفة

إعداد
الشيخ كامل محمد محمد عويضة

إقليدس

بين الفلسفة والمنهج الرياضي



دار الكتب العلمية

يطلب من : دار الكتب العلمية بيروت - لبنان
ص.ب : ١١/٩٤٢٤ ـ تلكس :ـ Nasher 41245 Le
هاتف : ٣٦٦١٣٥ - ٦٠٢١٣٣ - ٨٦٨٠٥١ - ٨١٥٥٧٣
٤٧٨١/١٢١٢/٠٠ ـ ٦٠٢١٣٣/٩٦١١/٠٠

الأعلام من الفلاسفة

إقليدس

بين الفلسفة والمنهج الرياضي

إعداد

الشيخ كامل محمد محمد عويضة

دار الكتب العلمية

بيروت - لبنان

الطبعة الأولى
١٤١٤هـ - ١٩٩٤م.

دار الكتب العلمية بيروت - لبنان
ص.ب: ١١/٩٤٢٤ - تلكس: Nasher 41245 Le
هاتف: ٣٦٦١٣٥ - ٨١٥٥٧٣-٨٦٨٠٥١-٦٠٢١٣٣
فاكس: ٠٠/٩٦١١/٦٠٢١٣٣ - ٠٠/١٢١٢/٤٧٨١٣٧٣

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

ما هي الفلسفة

إن تقديم تعريف واف قاطع للفلسفة أمر غاية في الصعوبة . إذ أن الفلسفة كباقي المآثر الإنسانية العظمى في المجتمع المثالي - وهي الفن والعلم والدين - لا يعدو أن يكون كل حد (أي تعريف) لها تعبيراً عن مفهوم فردي محدود يصور الناحية التطبيقية للفلسفة في ثقافة المعرف نفسه . وقلما يضفي التعريف فيضاً من الايضاح بمعزل عن معرفة الفلسفات المميزة التي صاغها رجال الفكر ، والمشكلات الفلسفية التي نشأت عنها تلك الفلسفات ، والدور الذي لعبه التفكير الفلسفي في حياة رجال الفكر وفي ثقافتهم . لنقل إذن إن الفلسفة محاولة إنسانية صالحة للاستكناه والبحث والتجربة وليست مصطلحاً للتعريف . ويجب أن ينبثق أي تعريف لها عن تحليل دقيق لما يفعله رجال الفكر عندما يتفلسفون وعن كيفية تمييز ذلك عما يفعلونه عندما ينقسمون في مجالات ثقافية أخرى - نعم ان الحدود بين هذه المجالات المختلفة غامضة غموضاً كبيراً ، ولذلك فإن التعاريف المختلفة ستعكس شيئاً من التعسف في وضع الخطوط الفاصلة فيما بين تلك المجالات .

- الفلسفة والدين والعلم والفن :

للتفكير الفلسفي حقاً علاقة وثيقة جداً بالدين وبالعلم وبالفن .

فلقد انتهت به المحاولة دائماً إلى أن يؤدي ، على نحو عقلي ، ما يؤديه الدين دائماً عملياً. وعاطفياً، أي أن يقيم صلات مرضية ذات مَغْزَى بين الحياة الإنسانية والكون الذي يجد الإنسان نفسه فيه ، وان يهيء شيئاً من الحكمة في توجيه الأمور الإنسانية . وإذا ما نظرنا من الزاوية التاريخية قلنا ان الفلسفة نشأت في صورة نقد فكري للمعتقدات الدينية الأخلاقية وظلت دائماً معنية بهذا النوع من النقد . غير انها تخالفت عن العلم في أساليبها حتى حينما كانت شديدة الانتقاد للمفترضات والنتائج العلمية السائدة في عصر ما . والواقع ان التفكير الفلسفي والتفكير العلمي ولدا معاً . وكثيراً ما تجدد نشاط التفكير الفلسفي باتصالاته المتجردة بمفاهيم الاستطلاع العلمي وطرقه ومقاييسه . غير ان الفلسفة متواشجة أيضاً مع الفن ، وذلك ان تللك الرؤى الشاملة للكون وللمصير الإنساني التي ترعاها من اعتزاز من حيث هي أنظمة فلسفية عظيمة للتفكيرِ النظري هي - بلا شك - في عداد المآثر الفنية العظيمة التي أبدعتها الروح الإنسانية . والحق إن الفلاسفة العظام قد وهبوا مخيلة شعرية ونفاذاً نقدياً وتقوى طبيعية وبصيرة روحية .

والتفكير الفلسفي وثيق الصلة بكل الميادين الثقافية الأساسية من المجتمع الإنساني إلى حد يجعلنا نسمي المزاج الفكري العام لعصر ما « فلسفة » ذلك العصر - وأعني بالمزاج الفكري نظرته الكونية الشاملة وطرق تفكيره المميزة ومفترضاته المأخوذة بالتسليم ، وجو الرأي ، فيه غير الرأي فيه - غير أن تسمة هذا كله باسم «فلسفة» العصر لا تكفي تماماً لتحديد وظيفة التفكير الفلسفي نفسه . فوظيفة

التفكير الفلسفي أكثر وعياً بذاتها وأكثر سمة تحليلية نافذة مما توحي به تلك التسمية وفي كل عصر يظهر رجال يحاولون ـ وهم على وعي بهذا المزاج الفكري العام المميز ـ أن يعبروا عنه تعبيراً منظماً أو أن يحاولوا تعديل بعض مظاهره . وهؤلاء هم الذين يمضون قدماً بالتفكير الفلسفي الفعلي ويستحقون لقب « فلاسفة » لأنهم يهتمون بالتحليل الواعي لطرق التفكير وبالصياغة الواعية لنظرة كونية .

ـ هل الفلسفة تفكير نقدي تأملي ؟

حين نقول : « فلسفة » عصر ما أو فلسفة انسان ما فهذا القول وجه من القبول إذ نعني به مجموعة المعتقدات لدى عصر أو إنسان . غير أن التفكير الفلسفي يتطلب شيئاً أكثر من تلك المعتقدات . ويمكن القول بأن كل إنسان يتشرب من مجتمعه فلسفة معينة ـ هو فيلسوف . بل قلة هم أولئك الذين يمتلكون ذلك الموقف النقدي أو التأملي الضروري لذلك التفكير الذي يدعي بحق فلسفياً . وذلك المزاج وذلك الأسلوب في النظر جوهريان من الفلسفة ، حتى قيل أحياناً في تعريف الفلسفة إنها « التفكير النقدي التأملي » . غير أن هذا التعريف أيضاً غير وافٍ لأنه لا يدل على الطابع المميز للمشكلات التي تهم التفكير الفلسفي ، ولا يدل على المهمة الحضارية والتاريخية المميزة التي حددت تلك المشكلات بتفصيل ذلك أن من ندعوهم « علماء » يفكرون تأملياً ولا شك ، ومع ذلك فإننا نفرق بين الفلسفة والعلوم الخاصة . بل أن صاحب الحرفة ، ورجل الصناعة ، وربة المنزل ، والمحامي يفكرون في بعض الحالات تفكيراً تأملياً ، وإن شئت فقل : كل الناس يفكرون تأملياً

في بعض الظروف ، ومع ذلك فهم ليسوا بالعلماء أو الفلاسفة ضرورة .

- النظرية والفِكَر المجردة :

يختلف التفكير الفلسفي عن التفكير التأملي العادي بميزة واحدة يشاركه فيها التفكير العلمي . فهو يستخدم فكراً مجردة أو تجريدات ويبين بواسطتها مبادىء أو قوانين . وهذا هو ما نعنيه اعتياداً بقولنا أن الفلسفة والعلم ميدانان « نظريان » ، أي أنهما يهتمان ببناء « نظريات » يتسع مجال تطبيقها . وهذا لا يعني أن النظريات فيهما لا يمكن أن تكون قد نشأت عن مشكلات عملية أو أنه لا أثر في التطبيق العملي . إن العلاقة بين النظرية والتطبيق هي في ذاتها مشكلة فلسفية اختلفت بشأنها الآراء . غير أن التاريخ أثبت مرة تلو مرة أن ليس لشيء قيمة تطبيقية « كالنظرية المحض » أما الإنسان العادي فقلما يهتم اهتماماً خاصاً بمثل هذه التجريدات فليس الصناعي بعالم في الاقتصاد ضرورة ، ولا المحامي بفيلسوف في الحقوق . إنما يهتم أمثال هذين في المقام الأول بموجودات متعينة وإذا اهتموا بالفكر المجردة والمبادىء فإنما يكون اهتمامهم بمقدار ما يفيدون من تطبيقها في مواقف معينة . أما الفيلسوف والعالم فيهتمان في المقام الأول بالفكر والمبادىء ولا يهتمون بتطبيقها إلا اهتماماً ثانوياً - مع أن الفكر والمبادىء التي يهتمان بها قد تكون مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بما في بيئتها الاجتماعية من مشكلات ونواحي نشاط . والناس في التفكير التأملي المألوف يهدفون دائماً إلى اتمام هذه الصفقة أو تلك ، وإلى ربح هذه الدعوى أو تلك وإلى التنزه بسياراتهم في الريف ، وإلى

المشاركة في الألعاب ، وإلى الكتابة ، والاقتتال والحب . أما تفكير العالم أو الفيلسوف فلا ينصب على حالات معينة وإنما يتعلق بفكر عامة تساعد على فهم هذه الحالات ومعالجتها . وهكذا يهتم العالم « بالمنفعة » و« الثمن » و« العمل » و« الطلب » و« الملكية » و« المساواة » و« بالتعاقد » ، و« بالعطل والضرر » و« بالطاقة » و« المصير » و« بالتسارع » و« بالثقل النوعي » وهلم جرا . ويهتم الفيلسوف « بالتجربة » و « المعرفة » و« بالمعنى والحقيقة » و « بالغاية » و« الله » و« بالطبيعة » و« العقل » .

هاتان الخاصيتان وهما التجريد والتعميم في الفكر والمبادىء الفلسفية وهما أمران مشتركان في تفكير الفيلسوف والعالم ، يمكن أن يستخدمهما أيضاً في التفرقة بين هذين النوعين من الفكر، أعني الفلسفي والعلمي فلكل حقل من حقول الاستطلاع العلمي فكرة الخاصة المعينة . فالفكر المتعلقة بعلم الفلك تهتم بالظواهر الفلكية ، وتهتم فكر علم الحياة بظواهر الحياة ، وفكر علم الاجتماع بظواهر الجماعات الاجتماعية ، وأما الفكر الفلسفية فليست محدودة بهذه الطريقة ، إنما هي أعم وأشمل من فكر العلوم الخاصة ويمكن انطباقها على ظواهر أوسع وأرحب . بل من الحق ، أن فرعاً من الفلسفة ، يسمى الفلسفة الميتافيزيقية قد جرى العرف بأن يقال في تحديده أنه « علم الوجود كوجود » وهذا معناه « التدقيق في تلك الخصائص الشاملة التي تظهر في كل حقل من حقول الاستطلاع » ، وتحليل الفكر التي تُعبِّر عن تلك الحقول مثل « الهيولي » و« الصورة » و« الوجود العارض » و« الكليات » و« العلة » و« المعلول » و« الحركة » و« الحدوث » .

ـ معنى التجربة الانسانية وما ينطوي عليه من مشكلات مركزية :

غير أن التفكير الفلسفي ليس مجرد تفكير تأملي يتمرس كالعلم ـ بمبادىء وفكر مجردة . فالمشكلات التي يتطرق إليها سمات فارقة تميزها عن مشكلات الاستطلاع والبحث العلمي المتخصص . وهذه السمات الفارقة تعني أولاً أن تلك المشكلات لا تقيد بالحدود الفاصلة بين الحقول العلمية ، وتعني ثانياً أن تلك المشكلات تنشأ متصلة بالأفكار والافتراضات الأساسية الماثلة في عدة حقول علمية مختلفة ، ولكنها أيضاً تتجاوز هذين المعنيين وتتعدى نطاقهما إذ أن المشكلات المعينة المتعددة في التفكير الفلسفي والتي كثيراً ما تصبح مُغْرقة في التقنية والتجريد ، هي في النهاية متصلة بمجموعة مركزية من المشكلات ـ منها تنطلق المشكلات والمسائل الفلسفية وإليها تعود ـ إذا ما دفعتْ إلى غايتها ووسع لها في مجالها . تعني كلمة فلسفة حرفياً « حب الحكمة » فمم تتكون الحكمة ؟ هنا اختلفت الآراء وتباينت الثقافات . فأي نوع من المعرفة هي ؟ وما هي العلاقة بينها وبين الأنواع الأخرى ، وخصوصاً النوع الذي ندعوه « عِلْماً » ؟ اعتقد الأغريق أن العلاقة بينهما وثيقة جداً فاهتم « حكماؤهم » بالشمس والقمر والنجوم والكائنات الحية وطريقة وجودها . وذهب الفيثاغوريون ، وهم ذلك الرعيل من الأغريق الذي أعلن إخلاصه للحب والحكمة أو الفلسفة ، إلى أنها ذات صلة وثيقة بالمعرفة الرياضية ومن ثم تعهدوا الرياضيات بحماسة فائقة . ودعيت الفلسفة بحق « أم العلوم » لأن التفكير الفلسفي وجه الاهتمام ـ المرة تلو المرة ـ إلى بعض المشكلات والحقول ، مثل الفلك

والرياضيات ، التي أصبحت بعدئذ موضوع بحث مستقل . واعتقد بعض الأغريق ـ مثل هيرقليطس ـ « بأن تعلم أشياء متعددة لا يلقن الفهم » وذهب إلى أن الحكمة شيء منفصل عن كل ذلك . نجد أن هذا الموقف يصدق على ثقافات غير أغريقية بأكثر مما يصدق على الثقافة الاغريقية التي يمثلها أرسطو تمثيلاً صادقاً حين يقول : « كل الناس يتوقون بطبيعتهم إلى المعرفة » .

ومهما تكن حقيقة علاقة الحكمة ـ أو الفلسفة بالأنواع الأخرى من المعرفة فهنالك اتفاق عام على نوع المشكلات التي تشكل نقطة الدائرة في اهتمام الحكمة أو الفلسفة ، وهي تلك المشكلات التي تثير السؤال عن معنى الحياة الانسانية وعن مغزى العالم الذي يجد فيه الانسان نفسه . ما هي الطبيعة العامة للعالم الذي تعيش في كنفه الحياة الانسانية ، بقدر ما لتلك الطبيعة من تأثير في مصير الانسان ؟ وما هو ذلك المصير ذاته ، وإلى أي حد يقدر الانسان ، بأفعاله وضمن نطاق اختياره ، أن يؤثر فيه ؟ وأية ضروب من النشاط والمساعي عليه أن يمارس ؟ وما أجدى نوع من الحياة يعيشه الفرد والجماعة ؟ .

ـ الفلسفة تفترض معرفة قائمة سابقة لها :

حين قلنا أن التفكير الفلسفي يتمثل في الاهتمام بما هو ذو معنى وذو مغزى من التجربة الانسانية وضح من ذلك أننا نفترض أن هناك تجارب انسانية كشفت شيئاً عن أمور هذا العالم . إذ لا بد للناس من أن يتعرفوا إلى تجاربهم بعض التعرف وأن يفهموها بعض الفهم إن شاءوا أن يقرروا مغزاها وقيمتها . فليس هنالك أي نوع من المعرفة ـ أو من المعرفة المزعومة ـ إلا ويستطيع التفكير الفلسفي أن

يتخذه نقطة انطلاق لتأمله الانتقادي ، وليس ثمة من حقل أو طور في مجال التجربة الانسانية إلا ويستطيع أن يمده بمادة ما . وإذا نظرت إلى الأمر من الزاوية التاريخية وجدت أن الفلاسفة بطبيعة الحال كانوا يبدأون دائماً بما تسميه مجتمعاتهم عهدئذ معرفة ، وبالمعتقدات السائدة في أيامهم وبالموروث الذي انحدر إليهم . وواضح أن هذا ما فعلوه حتى حين ظنوا ـ ظن ديكارت ولوك وكانط ـ أنهم إنما يتناولون الأمور من بداية البداية . فالمعتقدات وبخاصة تلك المتصل بمصير الإنسان وعلاقته بالقوى المسيطرة على العالم أمدت التفكير الفلسفي ـ طبعاً ـ بقسط وافر من مادته ، وتلك المعتقدات ، لصلتها بالتنظيمات الدينية ، هي في حوزة كل مجتمع من قبل أن يبدأ التفكير الفلسفي الانتقادي بالتأمل فيها . ومنذ أن ظهرت في اليونان بوادر محاولة لفهم العالم « عملياً » ، ثم منذ انبعاث الاستطلاع العلمي في أواخر القرون الوسطى كانت النتائج العلمية ضمن نطاق حدودها ، تتخذ نقطة انطلاق للمزيد من التأمل الفلسفي ، شأنها في ذلك شأن أثبت المعتقدات وأرسخها . من التهور اليوم أن نتجاهل « المعارف العملية » تماماً في معرض بحثنا عن معنى التجربة الانسانية . ثم أن لكل منظمة اجتماعية جانباً نظرياً ، ومعتقدات تتعلق بأهدافها وغاياتها ، وقواعد ومقاييس للأداء الممتاز ، ولكل هذه المعرفة المكنوزة أثر على معنى الحياة . وبالفعل منذ أن بدأ العلم يسيطر على حياتنا الفكرية تكونت عدة فلسفات في صورة احتجاجات على الاهمال غير المبرر الذي لحق هذه الحقول الأخرى من اهتمامات الإنسان التأملية .

على كل فيلسوف يسعى ليكون نظرة شاملة حقاً عن الكون ومصير

الانسان ، عليه ـ من الناحية المثالية ـ أن يتفحص ويستقرىء جميع مراحل التجربة الإنسانية وكل ضروب النشاط الإنساني المؤثل . إن ما أسميناه « فلسفة » عصر كامل وعنينا به تلك الرؤى التخطيطية العظيمة التي رسمتها عقول المفكرين المتأملين وجعلوها تعبيراً فكرياً عن عصورهم كان يأتي أحياناً شاملاً إلى حد ما. وهناك فيلسوف واحد على الأقل هو هيجل جعل محور اجتهاده تفحص جميع أطوار التجربة الإنسانية في تطوراتها التاريخية . ولكن قل أن نجد في الفلاسفة من ضارع هيجل في دقته وشموله لدى تفحص أدوار التجربة الإنسانية بل أن كثيراً من المفكرين التحليلين الذين أسهموا باثبات النتائج وأبقاها في كيان الطرق الفلسفية بنوا مآثرهم النقدية في الواقع على مجموعة محددة جداً من المعتقدات .

ـ تأويل المعرفة وتقييمها :

أن الاهتمام الفلسفي بالمشكلات المركزية المتصلة بمعنى أن التجربة الإنسانية وقيمتها تفترضان إطلاعاً على أوسع مجالات الحقائق الواقعية واستحواذاً على جميع ثمرات الضروب المختلفة من المعرفة ليتخذها مادة يعمل فيها الفكر . ولكن « المعنى والقيمة » أمر يتجاوز مجرد المعرفة ، أمر يثير الأسئلة الأساسية حول الأهمية والعلاقة المنطقية والقيمة النسبية . وبهذا المعنى كثيراً ما دعيت الفلسفة « تأويلاً للمعرفة » أو تأويلاً للتجربة الإنسانية في ضوء المعرفة الإنسانية في تصنيف متماسك إلى حد معقول يوائم بين معتقدات متنافرة أو غير مترابطة ، يرصفها في كيان قليل الفوضى والاضطراب ، كما وأنه يكيف مثلاً علياً متضاربة ليمنح الحياة اتجاهاً ما ، دون أن يستبعد الكثير من تلك المثل . وينطوي ذلك التفكير

على تقييم تأملي لما نتعلمه من هنا وهناك في حقول متعددة خاصة ، ثم أنه يقدر كيف يؤثر هذا على المشكلات المركزية ـ مشكلات وضع الإنسان في المخطط الكبير للأشياء ـ وعلى أهمية محاولاته المتعددة وجدارتها . وهكذا نصل إلى الاستنتاج المهم وهو أن البحث الفلسفي في ما هو ذو مغزى من التجربة إنما هو في الأساس عملية تقييم تأملي .

على أنه كثيراً ما ظن ان ما يفرق الفلسفة عن العلم هو ان الفلسفة تهتم بالقيم أما العلم فلا . إلا أن هذه التفرقة بين الفلسفة والعلم من الصعب دعمها بالحجة ، لأنه بينما كانت الفلسفة دائماً تهتم اهتماماً واعياً بالقيمة النسبية من مختلف الأفكار والأهداف ، فإنه ليس من الواضح ان العلم لم يكن كالفلسفة من هذا الشأن . بل اننا سنرى ان « الحقيقة » التي يبحث عنها العلم يمكن ان تعد نوعاً معيناً من القيم ـ من أحد الوجوه ـ ويمكن ان تعتبر أساليب تلك الحقيقة عملية يقرر بها أي الأفكار هي خير كفاء يثبت أمام ما تجريه من اختيار لدى صحتها . ومن الواضح ان تلك الأساليب يمكن ان تستخدم أيضاً لدى تقييم المعتقدات الأخلاقية والجمالية ، أي قيم السلوك والفن . وهذه التفرقة التقليدية بين العلم والفلسفة هي المسؤولة عما ألف عدا العلوم التقييمية الثلاثة ـ أعني المنطق وعلم الأخلاق وعلم الجمال . فروعا من الفلسفة ، وهي تلك العلوم التي تهتم بمعايير التفكير وأساليب السلوك وتجارب الفنون على التوالي . وهب أن هذه التفرقة نسبية لا غير فانه يبقى صحيحاً ان التفكير الفلسفي هو أساساً ، عملية تقييم نقدية ، تعمل على مستوى أعمق من مستوى التقييم من العلوم الخاصة، لأنها تهتم بالقيمة النسبية من خصائص

تلك العلوم ومقاييسها وتهتم بالتقييم النقدي لأساليبها وبالاستطلاع العلمي نفسه .

إن عملية التقييم والتأويل الفلسفيين هي - والحالة هذه - تمازج وثيق لعمليتين متعاونتين . فهي من جهة تنظيم وتنسيق للأفكار والمعتقدات بالنسبة لأهميتها وعلاقتها المنطقية بنظرة كونية شاملة ومنهج العيش . ومن جهة ثانية تنطوي مشكلة هذا التنظيم على تحليل دقيق للأفكار بغية التثبت من ماهيتها ومشمولاتها وهكذا يقوم التفكير الفلسفي بمهمتين إحداهما تحليلية والأخرى تركيبية أو تأملية ، وتتحقّق الإثنتان عملياً معاً - من العادة - مع أن الرجحان قد يكون مرة للواحدة منهما ومرة للأخرى . ولكن بما أن كل مهمة منهما شملت وأثارت مجموعة مميزة من المسائل - من الزاوية التاريخية - فسنعالج كلا من هاتين المهمتين على حدة في هذا المؤلف .

- تحليل الأفكار والأساليب وتوضيحها :

يشمل تأويل ما في التجربة الإنسانية من معان تحليلاً فلسفياً وكذلك يشمل تأويل مختلف صور المعرفة والأهداف ، تحليلاً لما تعنيه - لمجرد ما تعنيه - المفهومات والمبادىء والمعتقدات ولأثرها في غيرها من الأفكار وعلاقتها بها . وهذا ما يدعى في الغالب « توضيحاً » للأفكار والشواهد الدالة على صحتها، في ضوء غيرها من الأفكار التي تبدو وكأنها متقاربة والتي تستمد من مختلف أرجاء التجربة الإنسانية . وهكذا نواجه التفكير الفلسفي ، وهو يؤدي هذه الوظيفة التحليلية في توضيح نقد ما في المجهودات النظرية من أساليب أساسية وقواعد وطرق ومقاييس وسنن بما في ذلك تلك

المجهودات النظرية التي يشملها الاستطلاع العلمي نفسه . وقد لعب هذا النوع من التحليل والنقد دائماً دوراً عظيماً في مجموعة التواليف الفلسفية ، وبخاصة في العصر الحديث ، حين أثار تأويل التجربة الإنسانية كثيراً من مشكلات التوفيق بين الأفكار العلمية والمعتقدات الموروثة . وإزدادت حديثاً أهمية تفحص الأساليب والطرق. لأننا ندرك اليوم ان معنى الأفكار ومدى تطبيقها وبخاصة أفكار العلم المعاصر الجديد التي لم يألفها الناس يتوقف إلى حد بعيد على الطريقة التي تم بها التوصل إلى تلك الأفكار . فكل محاولة لتقييم مجملها الأعم بمعزل عن هذه الطرق والأساليب لا يقود إلا إلى التخبط والفوضى ، كما هي الحال من التأويلات الشائعة لفكرة « النسبية » مثلاً . وقد برهن مثل هذا التحليل على أنه ذو أهمية وقدرة على الجلاء والتبصرة حتى أن كثيراً ما عُدَّ القيام به غاية في ذاتها ، دون التفات إلى وقع تلك الأفكار الموضحة على التأويل الأوسع المسلط على ميراث التجربةالإنسانية .ويفضل كثيرون من الفلاسفة ، اليوم ، ان يقصروا جهدهم الفكري على مشكلات التحليل هذه ويتخلوا عن مهمة الفلسفة في التنظيم والتأمل للعلماء والشعراء .

غير أن توضيح الأساليب والطرائق الفكرية ونقدها كانا منذ بدء الفلسفة الإغريقية على ارتباط وثيق بالمشكلات الجوهرية في معنى التجربة الإنسانية . فقد قال بارمنيدس « Parmenides » في القديم « لا فرق بين الحادث الكائن وما هو قابل لأن يفكر فيه فهما شيء واحد » وبهذه القولة فتح الباب أمام الفحص المتلهف عن ماهية الشيء « القابل لأن يفكر فيه » . كذلك سقراط ، الذي كان منهمكاً

مستغرق الخاطر بالأمور التي تكفل التفرد للإنسان وتتألف منهما الحياة الفاضلة للأفراد والجماعات ، سقراط هذا علم الأجيال انه لو تمكن امرؤ ان يسلك الطريق الصحيحة لبلوغ النوع الصحيح من المعرفة لعاش حياة فاضلة وحل بذلك هذه المشكلة . أما أشد الناس واقعية مثل جون لوك الإنكليزي العنيد ، فقد قادهم التفكير الفلسفي البادىء باستقصاء المشكلات السياسية الملحة إلى تحليلات مؤثرة نافذة تناولوا بها « مصدر المعرفة الإنسانية ومداها وصنعتها اليقينية». ان أساليب التعرف وتجارب التعرف كانت دائماً واسطة العقد من التفكير الفلسفي لأنه ان لم يستطع الإنسان ان يعرف متى سوغ له ان يثق في ما يعرف فكيف يستطيع ان يتأكد من انه يعرف الأفضل والأنسب ؟ .

اقليدس المجاري
Euclides of Megara
(٤٣٠ - ٣٦٠ ق . م)

هو أكبر تلاميذ سقراط سناً . استضاف أفلاطون بعد موت سقراط وقد أطلع على الفلسفة الإيلية وأخذ بنظرياتها في الوجـود الواحـد وأخذ عن سقراط رأيه في أن الفضيلة واحدة لا تتعدد غير أنه اختلف مع أفلاطون في نظريته في تعدد المثل .

١ - جدله[١] :

وقد أخذ الميجاريون بجدل الإيلية ، وعنوا بوجه خاص ببرهان الخلف apagogic proof الذي يتلخص في اظهار وتناقض النتائج مع المقدمات .

وقد تحول جدل الميجارية مع خلفاء اقليدس إلى مراء جاف ، إذا انصـرف مجهـودهـا إلى اختـراع المغـالـطات ، ومن أشهـر هـذه المغالطات مغالطة كذاب أو بوليدس التي قصد بها معارضة مبدأ عدم التناقض الأرسطي أي استحالة وصف القضية بالإيجاب أو السلب .

---

(١) Cheruiss, Harold Aristotlés Griticism of plato and the Acodemy Vol - I Botimore 1944. pp. 500 – 505 Gillespe C. M. on the Megorians. Archif f. Gersch d. Philosophie 1911 XXIV pp.218. 5q.

Keneale, William and Keneale – Martha – the Development og Logic ox ford – 1962 Clas 1 – 3.

ومؤدى هذه المغالطة أنك إذا قلت أنك كاذب وكنت صادقاً فأنت كاذب وصادق في آن واحد .

وقد استمرت الميجارية من القرن الخامس إلى القرن الثالث ق . م وظهرت مهارة رجالها في الجدل وفي منطق التناقض ومن أشهر رجالها بعد اقليدس استلبون الميجاري وديودورس كرونوس الذي عارض منطق أرسطو ، وكان لها تأثير كبير على الفلسفة الرواقية .

٢ ـ نشأة المنهج وتطوره حتى اقليدس :

يتحتم علينا ، قبل أن نقوم بدراسة صلة المنهج الرياضي بكل من المنطق والحدس أن نقوم بدراسة للمنهج الرياضي في إطار الفكر الرياضي نفسه فنبين كيف نشأ وكيف تطور خلال العصور المختلفة ، وقد تتضح لنا خلال هذه الدراسة التاريخية النقدية بعض معالم المنهج الرياضي وقد يظهر لنا شيء من الصلة التي كانت له خلال مراحل تطوره بكل من المنطق والحدس .

وأقول قد تتضح بعض الصلة ذلك لأن من المرجع أن جميع نواحي هذه الصلة لن تتضح إلا بعد أن أدرس المنطق في نشأته وتطوره وصلته بالمنهج الرياضي من ناحية ، وهذا ما سأقوم به في الباب الثاني ، وبعد أن أدرس الحدس في عدة أنساق فلسفية ورياضية مبيناً كيف كانت صلته بالرياضيات ومنهجها وهذا ما سأقوم به في الباب الثالث ، وحينئذ فقط تكون معالم هذا المنهج وطبيعة صلته بكل من المنطق والحدس قد اتضحت تماماً .

أن الرياضيات الآن تعتبر أهم العلوم ، ويعتبر منهجها أدق

المناهج وتحاول العلوم الأخرى أن تنطبق منهجاً يحكى منهجها . ولكن ذلك ليس إلا نهاية تصير نقطة بداية تطور كبير شاركت فيه ، وستشارك كل الشعوب منذ بداية الفترة التاريخية . ومن المعروف أن تاريخ العلوم مختلط اختلاطاً كبيراً مع مراحل تقدم الحضارة . فكل حضارة تقابل مرحلة من مراحل تاريخ العلم. ويرى مؤرخو الرياضيات أنها مرت في تطورها بعصور مختلفة من حيث الزمان والمكان . فقد ينحصر عصر في قرن أو عدة قرون أو في جزء من قرن، وقد ينحصر في مكان محدد يسكنه شعب، أو في مكان ممتد تسكنه شعوب. وهذه العصور مختلفة أيضاً من حيث الكم الريـاضي ، الذي اكتشف أو طور أو انجز فيها ، ومن حيث كيف المكتشفات والمبتكرات عمقاً أو ضحالة أصالة أو تكراراً وتقليداً .

ومن حيث تحقق المكتشفات بالمنطق أو بالحدس ومن حيث عدد العلماء والمبتكرين ، اختلف العلماء في تقسيماتهم لهذه العصور[١] . ولذلك لن التزم بتقسيماتهم وسوف أتكلم بإيجاز شديد عن الرياضيات ومنهجها في ثلاثة عصور في عصر الشرقيين القدما ، وعصر اليونان ، وعصر ما بعد اليونان حتى الآن . وأني اعتقد أن عصر الشرقيين القدماء كان بمثابة مقدمة للرياضيات ومنهجها . وأن المنهج الرياضي قد اكتمل في العصر اليوناني وأن الفترة الثالثة هي فترة نقد للمنهج الرياضي وتمحيص ، وإضافة وحذف ، وأخذ ورد .

---

(١) Pierre Boutroux l'ideâl scientifque des mathematiciens p. 17: Bell, Men of mathematics, Vol. 1. pp. 17 – 18, hene Taton, Histoire du calcul pp. 9 – 42.

وسوف أتناول في هذا الفصل العصرين الأولين مرجئاً العصر الثالث للفصل التالي .

أولاً : الرياضيات ومنهجها عند قدماء الشرقيين :

منذ أن انتظمت المجتمعات الإنسانية الأولى : ظهرت حسابات بدائية وطرق فنية للحساب الشفوي والمحسوس[1] كما ظهرت هندسيات تجريبية وقواعد عملية استخدمت في مسح الأراضي وفي التشييد والبناء ، ومن المعروف أن الرياضيات مهما بدت صورية مجردة ، فقد نشأت عن هذه القواعد التجريبية . ولا يختلف في ذلك الحساب عن الهندسة . ومع أن بوانكارية يرى أن الرياضيات ، وأعني الحساب والهندسة ليست علماً يقوم على التجربة ، لأن التجربة عاجزة عن تحقيق المسلمات والبديهيات وعن تأييدها أو نفيها أو مع أنه يرى أن التجربة لا يمكن أن تكون نقطة بداية الهندسات المختلفة التي تقوم على المنطق ، والتي تكون كلها متساوية تبعاً لذلك في الصدق . فإني أستطيع أن أؤكد أن الرياضيات لم تصبح علماً صورياً منطقياً ، إلا بعد مراحل طويلة من التطور ، بعدت فيها شيئاً فشيئاً عن نشأتها ، وأن الهندسة لم تصبح علماً صورياً إلا منذ أن تصور المرء النقطة . وعندما تجردت الهندسة عن كل مادية أصبحت مثالاً ونموذجاً ، وأصبحت تدين بوجودها للعقل البشري لا للعالم المادي .

---

(١) Rene Taton, op. cit., p. 9.

ومهما تكن الهندسة الآن متحررة من التجربة، فإنها تولدت عنها. فقبل أن يكون لدى الإنسان أقل فكرة عن الهندسة كان يصنع أشياء هندسية قد تمتاز بانتظام مدهش، وقد صنفها بأنها متماثلة بالنسبة للمحور. فالمستقيم والسطح والدائرة والكرة والبيضاوي كلها منتجات نظرية للصناعية البشرية. وكانت الأشكال والمجسمات المتحققة على هذا النحو لا تختلف في شيء عن الأشياء الفيزيقية فإذا أراد المرء أن يعرف خصائصها كان عليه أن يلاحظها ملاحظة مباشرة، ومن ثم كانت تجريبية كافية لاكتشافها جميع ما تقتضيه المزاولة العملية[1] وما زالت كلمة الهندسة باللغة الأوروبية تذكرنا بهذه النشأة العملية والتجريبية.

ولقد كان الحساب أيضاً تجريبي النشأة، دعت إليه الدواعي النفعية والعملية. ولقد خرجت فكرة العدد وفكرة العد من ملاحظة الأمور المحسوبة وكانت فكرة العدد في نظر البدائيين بمثابة كيفية لمجموعة من الأشياء وكانت الوحدة تمثل بشيء ما. ويمثل العدد بتكرار رمز الوحدة. وقد استخدم الجسم الإنساني. وبالأخص الأصابع لعد ما دون العشرة. وقد أطلقت أسماء على هذه الأعداد دون أن تقر علاقات بينها. ولكن هذه العملية لا يمكن أن تمتد الى ما لا نهاية. وكان من الضروري أن توضح الأعداد الأكبر في مجموعات، كي نتجنب مجهودات الذاكرة، مجهودات العرض الهائلة، فلجا البدائيون قديماً جداً إلى نظام الأساس، كما هو الحال في نظامنا العددي الحالي. وعندما قيل هذا النظام أوصل

---

(١) Jules Sagenet. La systéme du monde, pp. 5 – 6.

العـدد شيئاً فشيئـاً إلى صورتـه الحديثـة وانتقلت فكـرة العـدد من المحسـوس إلى المجـرد ببطء ، ثم شملت شيئـاً فشيئـاً الأعــداد الصحيحة والأعداد الكسرية والأعداد السالبة والأعداد غير القياسية ثم أخيراً الأعداد الخيالية(١) .

وهناك توازن بين تطور الأعداد وتطور الحساب ومهما بدا الحساب اليوم علماً صورياً مجرداً ، فإنه نشأ عن الحساب المحسوس الذي كان يجري على الأصابع أو على الحصى ، وكانت عمليات الجمع والطرح وضرب عددين من رقمين تجري على الأصابع أيضاً . أما العمليات الأكثر تعقيداً فكان يستعان فيها بحساب ذهني ، وكانت لهم آلات للحسـاب كالآلات التي نعلم عليهـا أطفالنـا . ومـازال اسم الحساب في اللغات الأوروبية يذكرنا بالأصل التجـريبي والمادي له(٢) .

(أ) المنهج الرياضي عند البابليين :

وأقدم وثائق لدينا عن تاريخ الرياضيات وصلت إلينا من أرض ما بين النهرين، ترجع إلى الألف الثالث قبل الميلاد. ويبدو أن ما أضافه البابليون لفروع العلم الرياضي، وما أضافوه لمجموعة القواعد العملية المستخدمة في الحساب والجبر والهندسة مبتكر وأصيل. وعلى الرغم من كثرة عدد الوثائق والمستندات لا نجد بينها كتاب تعليمي عن العلم الرياضي الكالداني . فهنـاك فقد عـدد كبير من النتائج المتفرقة(٣) . وأقدم هذه الكتابات تظهر لنا طريقـة حسابيـة

(١) TaTon, op. cit., p. 41 – 45.

(٢) Ibid., pp. 11 – 13.

(٣) Ibid., pp. 9 – 10.

متطورة ، فلقد استخدم الكالدانيون نظام الأساس ٦٠ ، الذي يقوم على مبدأ الوضع . وهذا النظام الستيني أفضل من جميع النظم القديمة ، كما أنه هو المستخدم الآن في الهندسة وحساب المثلثات . كما استخدموا النظام العددي العشري الذي نأخذ به الآن[١] .

وقد استخدم الكالدانيون أصابعهم في عمليات الجمع والطرح والضرب كما أجروا حسابات ذهنية ، بالإضافة إلى الحسابات المحسوسة في حالة العلميات المعقدة . وقد استعملوا أيضاً لعمليات الجمع والطرح الآلات الحسابية . ولكنهم استخدموا بالنسبة للضرب والقسمة جداول عددية وضعوها لتستخدم دائماً[٢]

وقد ساعدهم نظامهم العددي كي يدرسوا لأول مرة في التاريخ مسائل جبرية ولقد أوضحت ترجمة حديثة قام بهذا الأستاذ تيرو دانجان thurea Dangin لعدد كبير من اللوحات الرياضية البابلية أن البابليين توصلوا ، بدون أن يعرفوا الجبر بالمعنى العادي ، إلى حل مسائل جبرية من الدرجة الأولى والثانية[٣] وأحياناً من الدرجة الثالثة ، في الألف الثاني قبل الميلاد ويصعب قراءة هذه المسائل ، لأنها تخلو من الرمزية ، ومن كل استدلال بالمعنى الدقيق ، ويبدو أن المناهج التي اتبعوها قريبة جداً من طرقنا وإنها تدل على طريقة فنية

(١) Ibid., pp. 10, 41, 51, Brunschvicg, Les étapes de La philosophie mathématique, p. 20, Robin, Lapensée grecque pp. 10 – 39.

(٢) TaTon, op. cit., pp. 1 – 12, 14.

(٣) Ibid ., pp. 10, 92 – 93, Lucien Godeaux, Les géométries, p. 10.

متقدمة ، وتوصل الحسّابون الكالدانيون إلى الحل بواسطة حسابات تشابه المنهج التحليلي الحديث . ولكن التتابع الطويل للحسابات التي يصعب تفسيرها لا تتضمن معادلات أو استدلالات .

وقد يخطر على بالنا هذا السؤال : هل يعني هذا أنهم استخدموا منهجاً نظرياً عاماً ؟ .

إن العدد الكبير للمسائل المحلولة وتنوعها ، والاختيار التحكمي للعمليات واختصار الحدود المتشابهة والحذف بالتعويض وادخال مجهول إضافي ليبرهن ، فيما يقول تاتون ، على ذلك[١] وإذا كان تاتون يرى أن الكالدانيين هم أول من طبقوا منهجاً نظرياً في الرياضيات ، وبالأخص الجبر ، فليس هو الوحيد الذي يرى ذلك ، فهناك كثيرون غيره ، أخص بالذكرمنهم الرياضي الانجليزي المعاصر بل Bell الذي كاد أن يقول أنه ليس من العدل أن تنسب فضل البرهان الرياضي إلى فيثاغورث واليونانيين ، فالبابليون فيما يذكر ، هم أول من دعا إلى ادخاله في الرياضيات وقد أخذه ، عنهم فيثاغورث عندما زار بابل[٢] .

ويبدو أن الكالدانيين قد ملكوا ما هو ضروري في الطريقة الفنية الجبرية فيما عدا الرمز ، وما كان ينقص جبرهم له أهمية كبيرة لدرجة أنه يعوق التجريد ويعوق التعميم ، ولا يسمح بأن نضفي على هذه

---

(١) Taton, op. cit., p. 93.

(٢) Bell, op. cit., Vol. I. p. 18 – 20.

العملية الفنية الهائلة ، والتي بقيت مع ذلك تجريبية ، اسم العلم نفسه[1] .

أما في الهندسة فقد توصلوا إلى حساب المكعبات والمربعات وأوجدوا مساحة المثلثات والدائرة والأشكال الرباعية بشيء من التعريب ، واستنتجوا من ايجادهم لمساحة المربع بطريقة عملية ، أن مساحة المثلث المشترك معه في القاعدة والارتفاع تقدر بنصف مساحة هذا المربع ، وتوصلوا في ايجادهم لمساحة المثلث إلى ايجاد مساحة أي شكل باعتباره مكوناً من مثلثات . وذلك في الألف الثالث قبل الميلاد . ولقد قدروا مساحة الأشكال الرباعية بحاصل ضرب متوسطات الأضلاع المتقابلة . ويبدو أن هذه كانت طريقة حدسية تعطي نتيجة تقريبية ، يزداد قربها من الحقيقة . كلما اقتربت زوايا الشكل الرباعي من القوائم . ولذلك يؤكد العالم الألماني أوبيرت Oppert أن هذه الطريقة لم تكن عامة ، وإنما استخدمت في إيجاد مساحة الأشكال القريبة من المستطيل . كما توصلوا عملياً إلى تقدير مساحة الدائرة بطريقة تقسيم الأشكال إلى مثلثات ، وقدروا هذه المساحة بنصف حاصل ضرب المحيط بنصف القطر ، وتوصلوا إلى قيمة غير دقيقة للنسبة التقريبية ط (نسبة المحيط إلى نصف القطر) إذ قالوا إنها تساوي ٣ في حين أنها ١٤ ، ٣ تقريباً . وكان العدد ٦٠ يقابل $\frac{١}{٩}$ المحيط الذي يقابل زاوية مقدارها ٣٦٠ ، ويبدو أن ذلك هو تقريب لعدد أيام السنة . ويؤكد العلماء معرفتهم لكثير من

---

(١) Taton, op. cit., p. 93.

الحقائق الهندسية التي عرفوها بطرية تجريبية . فعرفوا مثلاً أن ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف القطر[1] .

وعلى كل حـال يمكننا أن نؤكد ، في ضوء الوثائق الحديثة أن ما أتى به الكالدانيون قد اسهـم إلى حد كبير في نشأة العلم الرياضي وبالأخص الحسابي في العالم الشرقي ، ومع ذلك فإن الطريقة الفنية الكالدانية، مهمايكن من كمالها ، لم تترك شيئاً فيه أقل بحث منزه عن الغرض والعمل، فالعلم، فيما يبدو، كان حبيس ... الفنيه والتطبيقات العملية . وكانت تنقصه الحاجة إلى المثل الأعلى والجمال اللذين كانا خاصية العلم الهيلليني[2] ونستطيع أن نقول من المحتمل أنه كان لدى الكالدانيين منهج نظري طبقوه في الجبر الذي لم يكن مجرداً لافتقاره للرموز . ولكن ليس هناك دليل قاطع على أنهم تصـوروا هذا المنهـج تصوراً واضحـاً ، على نحـو مـا فعـل اليونانيون الذين حددوا مراحل المنهج الرياضي تحديداً دقيقاً .

(ب) المنهج الرياضي عند قدماء المصريين :

ولقد كانت الموضوعات التي اهتم بها المصريون اهتماماً عقلياً ذات صيغة نفعية وليس لحكمتهم فيما يرى دي بورج Du Burgh قيمة

---

(١) Robin. op. cit., pp. 38 – 39. Godequx. op. cit., p. 9. Sageret, op. cit., pp. 1 – 8.

Emile picard. Lascience modern etson état actuel. p. 2 Dela science (apud de tz methodedans les sciences, par Bouasse) p. 2.

(٢) Taton, op. cit., p. 10.

علمية كبيرة فهم لم يظهروا ميلاً كبيراً للعلم الخالص أو الفلسفة[1] . ولقد اهتم المصريون منذ وقت مبكر بالمبادلات وتوزيع البضائع والأراضي . وكانت المبادلات التجارية وتوزيع الضرائب سبباً كافياً لتطور الحساب . واقتضت ضرورة مسح الأراضي الغنية للنيل كل عام بعد كل فيضان ، وحاجتهم إلى التشييد والبناء ، الأبحاث الأولى للهندسة ، أما العلم النظري فقد ظل وقفاً على الكهنة ، ولم يمارس الكتبة والحسابون إلا الحساب العادي .

والكتابات التي لدينا عن العلم الرياضي المصري حديثة نسبياً ، فهي ترجع إلى الأمبراطورية الوسطى ، أي إلى حوالي سنة ٢٨٠٠ ق . م وهي مجموعة تمرينات لحساب عددي أولي ، وقواعد عملية لإيجاد مساحة بعض الأشكال وأشهر هذه الكتابات ما يسمى ببردية ريند Paprusde Rhind ، وهذه البردية تعالج عدداً كبيراً من المسائل المحسوسة . وتعكس طريقة فنية بسيطة وماهرة في الآن عينه وتبدو هذه الطريقة في جمع الكسور وضربها وقسمتها . ومع أن البردية تحتوي على عدد من الحسابات اليدوية المجردة عن التطبيقات العملية إلا أن جميع طرق الحساب المستخدمة تشهدُ بغياب التصور العام للقواعد[2] .

ويؤكد العلماء الذين درسوا البرديات المصرية أن المصريين توصلوا إلى ايجاد مساحة الأشكال الهندسية بطرق تجريبية وهذه الطرق التجريبية بقيت حتى استخدمها مساحو روما ، ثم مساحو

---

(١) تراث العالم القديم ، تأليف ز . ج . دي بورج ، وترجمة زكي سوسي ، صفحة ٣٦ .

(٢) Taton, op. cit., pp. 10 – 16, Brunschvicg, op cit., p. 26, Robin, op. cit., p. 39; Sageret, op cit., p. 13.

أوروبا في العصور الوسطى . ويظن أن المصريين على الأقل كانوا يشعرون بالطابع التقريبي لهذه التقديرات . ولقد قدروا قيمة النسبة التقريبية ط بـ $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٣٤ وتوصلوا بها إلى إيجاد مساحة الدائرة بمعرفة القطر ويبدو أن هذا التقدير قد وصلوا إليه عن طريق التجربة المباشرة . ومن الجدير بالذكر أن تقدير المصريين للنسبة ط قد أخذه عنهم اليونان ، وما زلنا نستخدمة للآن(١) .

ويؤكد بعض العلماء أنه لم يكن لدى المصريين أية معرفة هندسية ضرورية ونافعة . أو حتى كافية لكي يصلوا إلى هذه النتيجة ، التي توصلوا إليها من مجرد المقارنة المباشرة لطول محيط عمود مع طول قطره . وقد توصلوا بهذه الحيلة بعد ذلك إلى تقريب أدق . إذا قدروا هذه السنبة بـ ٣,١٤١٦٦ أو بـ ٣ + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٩٠}$ ويرى بعض العلماء أن هذا التقدير لا يفترض دقة نظرية من جانب شعب أقام الأعمدة الهائلة حيث يمكن تقدير $\frac{١}{٩٠}$ من قطر هذه الأعمدة بكل دقة ، لأن هذا المقدار كبير ، ومن الممكن تصوُّر دقة التقدير(٢) .

وهناك بردية أخرى تسمى بردية كاهون Kahun ترجع إلى أكثر من عشرين قرناً قبل الميلاد ، تحتوي على حسابات تخص خصـائص المثلث الذي أضلاعه ٣، ٤ ، ٥ وحدات(٣) وليس هناك في هذه البردية ، فيما يذكر العلماء ، أي بحث نظري ، ولا يتعرف فيها ، كما لا يتعرف في البردية السابقة على اهتمام بالتعميم المجرد .

(١) Godeaux, op. cit., p. 9; Sageret, op. cit., pp. 1 – 11.

(٢) Sagert, op. cit., p. 11.

(٣) Robin, op. cit., p. 39.

ولقد توصل المصريون إلى معرفة خاصية المثلث القائم الزاوية أيضاً بطريقة تجريبية من إقامتهم للحوائط العمودية ، والتأكد من عموديتها على نحو ما يفعل البناءون ، بخيط مقسم إلى ٣ ، ٤ ، ٥ وحدات(١) .

وتؤكد بردية ريند أيضاً بأمثلة عديدة أن المصريين عرفوا خاصية مربع وتر المثلث القائم الزاوية الذي أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ وقد توصلوا إليها بدون أي علم هندسي . وذلك بالطريقة العملية التي كان ومازال يستخدمها البناءون في أنحاء متفرقة من العالم . كما عرفوا هذه الخاصة في حالة كون المثلث القائم الزاوية متساوي الساقين . وقد علمتهم الملاحظة المباشرة هذه الأمور ، علمتهم أن المربع المقام على وتر المثلث القائم يساوي مجموعة المربعين المنشأين على الضلعين المتساويين الآخرين ، وذلك لأن المربع الأكبر يحتوي ، إذا وصلنا قطرية على أربعة مثلثات كل منها يساوي المثلث الأصلي ، بينما يحتوي كل من المربعين الآخرين على مثلثين كل منهما مساو له(٢) .

ومن هاتين الحالتين : حالة المثلث القائم الذي أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ وحالة المثلث القائم المتساوي الساقين ، كان المرء يستطيع أن يرتفع بسهولة إلى النظرية العامة بمنهج تجريبي . فكون مربع الوتر له الخصائص نفسها في مثلثين قائمين مختلفين يجعل المرء يظن أن هذه الخاصية عامة في جميع أوتار المثلثات القائمة

---

(١) Sagerat, op. cit., pp. 11 – 12.

(٢) Ibid., pp. 13 – 14.

الزوايا، وما كان عليه ألا أن يكتفي بالبرهنة عليها عملياً. ولكن قد يساور الشك المرء عند بداية هذا التحقيق وقيام الشك يقتضي فيما يقول «مساجيريه» وجود حب استطلاع هندسي وحب الاستطلاع الهندسي ليس شيئاً طبيعياً وعاماً . فليس لدينا للآن أي دليل على أن المصريين حاولوا تعميم موضوع مربع الوتر[١] وعلى ذلك فإن المصريين لم يرتقوا إلى النظرية في عمومها ولم يعرفوها إلا في حالتين ولقد عرف المصريون النسب بين الخطوط، وفكرة مقياس الرسم والتشابه الهندسي بطريقة عملية تجريبية ، طبقوها في بناء أهراماتهم ومعرفة ما يلزمهم لبنائها . وقد حلوا بالتشابه جميع مسائل حساب المثلثات المستوى واستطاعوا أن يقدروا ارتفاع نقطة لا يمكن الوصول إليها . يرصدها من نقطتين على الأرض بينهما مسافة . ثم رسم مثلث بالاعتماد على معرفة زاويتي الرصد تمثل قاعدته هذه المسافة بمقياس رسم مناسب ويمثل ارتفاعه النقطة . فيكون نسبة ارتفاعه إلى ارتفاع النقطة كنسبة قاعدته إلى القاعدة المرسومة على الأرض[٢] ويؤكد العالم الروسي استروف Struve بناء على دراسته لترجمة بردية أحمس أن المصريين توصلوا إلى تقدير حجم الأهرام ومساحة الكرة بطريقة تجريبية أيضاً[٣] .

ويرى مؤرخو الرياضيات أن الهندسة المصرية مجموعة قواعد عملية ذات طابع تجريبي ، ويرفض بعضهم أن تكون هذه الهندسة

---

(١) Ibid., P. 15.

(٢) Ibid., pp. 15 – 16.

(٣) Godeaux., op. cit., p. 10.

شرطاً ضرورياً أو كافياً لقيام الهندسة في العالم الهيلليني . في حين أن بعضهم يرى أن الهندسة اليونانية امتداد طبيعي للهندسة الشرقية القديمة .

ويظن بعض العلماء أن الطريقة الفنية الدقيقة : التي يتضمنها كتيب أحمس في انعكاس الرياضيات أكثر وعياً ، معرفتها كانت مقصورة على الصفوة . وقد يصعب علينا ، لنقض الوثائق ، أن نستنتج ما يؤكد هذا الرأي ، خاصة وأن هناك بردية رياضية مصرية مكتوبة باللغة اليونانية نشرها العالم «بابية» تسمى بردية أخميم . وهي متأخرة عن بردية أحمس بأكثر من ألف سنة فيها صور مركز للحساب المصري؛ . ولكنها لا تلقي ضوء على التطورات الرئيسية للتفكير المصري مما قد يدعو الباحث أن يخرج من قلة الوثائق التي تحت أيدينا بنتيجة : هي افتراض عدم تميز العلم الرياضي المصري بالاعتبارات النظرية . ويترتب على هذا رفض الحكم بأن التفكير اليوناني قد اعتمد على الثقافة المصرية ، ذلك لأن مكتشفات المصريين الهائلة انحصرت في الوصفات النغصية والقواعد العملية . وقد اهتموا باللوجستيقا أو الحساب العلمي ، ولم يصلوا إلى العلم الحسابي النظري بالمعنى الدقيق . ذلك العلم الذي يفترض ما لم يصل المصريون إلى إدراكه وأعني بالعدد باعتباره موضوعاً للتمثل ، مأخوذاً كأساس نسق من الاستنباطات المنظمة . كما اهتموا بالمساحة . ولم يهتموا بالهندسة المجردة ولم يدركوها على أنها تتابع في القضايا القابلة للبرهان ابتداء من عدد قليل من الأوليات .

وفي هذا يذهب دي بورج إلى الحكم بأنه لم يتضح عند

المصريين منهج علمي ، ولم يتضح إدراكهم له . ويضيف إلى ذلك قوله : « وقد كان أفلاطون على حق تـام عندما انتقد الرياضيـات المصرية بأنها قاصرة على أغراض عملية بحتـة . وعلى الرغم من ذلك نجد عندما نقارن الطريقة الحسابية المصرية بالطريقة الحسابية الفيثاغورية أن العدد يلعب فيها دوراً عملياً أكبر من دور حدس الشيء العددي . وإذا نظرنـا إلى المشاكـل التي أدى إليها تفسيـر الأعداد الكسرية في القرن التاسع عشر الميلادي لدهشنا للجرأة التي عالج بها المصريون الكسور . ففي مرحلة ما قبل الجبر وصل المصريون إلى حلول للمسائل الحسابية الصعبة التي كانت تحتاج إلى استخدام الجبر . وذلك بقواعد عملية دون أي تبرير منطقي . ويحق لي أن أقول مع برانشفيك : أن المظهر البرجماتي للحساب المصري قـد أظهر النواحي العقلية للتفكير الرياضي ، وأبان بعمق لا شعوري كل الخصوبة التي أثبتت علوم العدد أنها قادرة عليها . كما يجعلنا نستمع إلى أميل بيكار حيث يقول : دعنا لا نحتقر مع ذلك هذه الرياضيات قبل العلمية بحجة إنها نفعية ، فأولاً لا يبدو لي ممكناً ألا يكون لهذه الرياضيات أجزاء نظرية على الرغم من عجزنا عن أن نسوق دليلاً دقيقاً في هذا الموضوع ، علاوة على أن الوقائع الرياضية والفلكية التي ندين بمعرفتها للمصريين والكالدانيين ، كانت نقطة بداية ضرورية للتأملات اللاحقة .

ومن الممكن أن نؤكد مع «تاتون» أن العلوم الكالدانية والمصرية حملت في ذاتها عصارة غذت الازدهار الخارجي الهائـل . وسوف أعود إلى هذا الموضوع مرة أخرى فأتناوله بشيء من التفصيل .

(جـ) المنهج الرياضي عند الصينيين والهنود :

هناك إلى جانب الكالدانيين والمصريين حضارات شرقية أخرى قديمة تنقصنا المعرفة الجيدة لها ، لأن وثائق العصر قد تعرضت لنقل بعدي .

ويبدو أن ما أسهم به الصينيون من تطور العلم الرياضي محدد. لقد كانت اكتشافاتهم المزعومة من فعل الهام خارجي ، فحضارتهم القديمة لم تهتم بالبحث العلمي. وكان للعدد عند الصينيين طابع سحري وكان يلعب دور الإشارة والرمز ومن ثم كان للحساب عندهم طابع عملي .

وإن أقدم كتاب رياضي صيني وصل إلينا هو theonpei ويرجع إلى الألف الثاني قبل الميلاد ، وهذا الكتاب، الذي نشر ترجمته الفرنسية ادواربيوت Biot سنة ١٨٤١ ، يبين هذا الطابع العملي في الحساب والهندسة الصينية، ويشير إلى أن الصينيين عرفوا خاصية المثلث القائم الزاوية في حالة كون أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ المستطيل الذي أضلاعه ٣ ، ٤ إلى قسمين بتوصيل القطر يكون طول هذا القطر .

أما قدماء الهنود، وهم موهوبون في الحساب، فقد أحبوا، على العكس، الانغماس في عالم الأعداد يكتبونها ويركبونها وليس لدينا عن قدماء الهنود أية وثائق رياضية أكيدة سابقة على القرن السابع الميلاد أما Sulva suttas فهي وثائق حديثة نسبياً . وليست ، بلا شك ، في قدم ما عهدناه عند الكالدانيين والمصريين والصينيين . وإن كان العلماء لم يستطيعوا بعد تحديد فترتها التاريخية . ويجد من يرجع إلى هذه الوثائق حالة من حالات المثلث القائم الزاوية .

ولم يستطع قدماء الهنود أن يرتفعوا إلى النظرية في عمومها ، إذ عرفوها عملياً محصورة في حالة واحدة ، حيث تكون اضلاع المثلث هي خمس واحدات وأثنتا عشرة وحدة وثلاث عشرة وحدة . وهكذا أدت الحاجات العملية بقدماء المصريين والصينيين والهنود إلى السير في الطريق المؤدي إلى اكتشاف النظرية التي ستنسب فيما بعد إلى فيثاغورث وربما توصل الهنود إلى فن المساحة والانشاء . كما توصلوا إلى الحساب . وإذا كان ما أسهم به الهنود في تطوير العلم القديم ضئيلاً ، فإن صفاتهم العملية قد سمحت لهم أن يدفعوا العلوم الرياضية ، وبالأخص الحسابية دفعة جديدة في أوائل عصرنا .

(د) المنهج الرياضي عند الفينيقيين :

وفي حوالي الألف سنة قبل الميلاد ازدهرت حضارة في فينيقيا وفي البلاد المجاورة ، وقد شاركت الشعوب التي اشتهرت بالتجارة والتي عاشت في هذه المنطقة إلى حد كبير في نشر المعرفة الشرقية ، ولكن عدم توافر الوثائق لا يسمح لنا أن نحدد مدى تأثير تلك الحضارة التي نشرها هؤلاء وإن كان بعض المؤرخين للفلسفة والعلم ، ومنهم أميل بيكار وريان يرى أن التحولات العقلية والمنهجية التي ظهرت في العلم الهيللني ، ترجع إلى أثر العلم الشرقي الذي سبق أن وجد ، ويرى رويان أن مصر ، حيث كرست طائفة sacerdote أوقات فراغ ضرورية للدراسات المنزهة عن الغرض كانت مصدر النظم الرياضية فمؤسسا العلم الرياضي طاليس وفيثاغورث لم يفعلا أكثر في أخذ مادتهما من مصر . هكذا يقول أوديم للمرة الأولى وايزقراط Isocrate للمرة الثانية . وهذا الأخير وهو

كما يؤكد اريستوكسين Aristoxene ، مستودع التقاليد الفيثاغورية ـ قام برحلة إلى زاراتاس Zaratas ، وقام غيره برحلات إلى الهند وكالدانيا وفارس وأثيوبيا لكي يشرح المعرفة الأنسيلكوبيدية لديمقريطس Democite .

ومن هذه التقريرات يمكننا أن نؤكد أن اليونانيين قاموا برحلات بطريق البحر أو القوافل ، وقد حصل اتصال بينهم وبين أثيوبيا ومصر وفينيقيا وبابل وبين هذه الأخيرة وبين الهند والصين ، وكل ما كان في القرن الثامن أو التاسع قبل الميلاد قد قبله اليونانيون مع بعض التبرير الايجابي من جانبهم .

ثانياً : مدى تأثير الرياضيات الشرقية ومنهجها في قيام المنهج الرياضي عند اليونان :

وصلنا في آخر النقطة السابقة إلى أن اليونان قد تأثروا بالعلم الشرقي القديم ، وقد أخذوا منه . وأضافوا إليه التبرير والبرهان . فهل كان هذا العلم شرطاً ضرورياً وكافياً لقيام العلم اليوناني وبالأخص الهندسة التي كانت في نظرهم العلم الحق ؟ .

يبدي جول ساجيريه أننا لا نستطيع أن نشك في أن وجود الهندسة التجريبية لم يكن شرطاً ضرورياً لقيام الهندسة العملية ، التي تتسلسل نظرياتها ابتداء من قضايا أولية ، لا يمكن ردها إلى غيرها . كما يرى أنها لم تكن شرطاً كافياً .

ويرى أن ميلاد الهندسة ظاهرة لها عدد من الاحتمالات ، فهي تنشأ عن حاجات مادية ، وعن حاجات خلقية ، وإذا تأملنا هذه الحاجات

المادية المكتفية بالتجريبية ، نجد أنها لا تحث على تغييرها منهج إلى آخر من الهندسة التجريبية التي أقامتها .

فكيف وصلنا إذن إلى فكرة البرهنة على ذلك الشيء الذي تقرره التجريبية تقريراً مباشراً ، برهنة معقدة غير مباشرة وطويلة وشاقة ؟ ويستنتج ساجيريه أنه لمن الخطأ أن نفترض في الكالدانيين والمصريين ، هندسيين قبليين (غير تجريبيين) بالمعنى المعروف لكلمة هندسة اعتماداً على ما للكالدانيين والمصريين من ذكاء لا ينكر . ويرى ساجيرية أن الغرض المناقض قد يكون أكثر احتمالاً .

أن الهندسة في رأي ساجيرية تحتاج في قيامها إلى حب استطلاع هندسي وهذه الشهية الهندسية على حد تعبيره ليست تلقائية ، وليست كلية وعامة، إذا هناك مرض يصيب الإنسان في بداية تعلمه الهندسة ، يجعله يتساءل ما فائدة البرهنة على ما يستطيع المرء أن يتبيّنه جيداً ؟ وهذا يؤدي به إلى تفضيل التحقيق التجريبي على الاستدلال الاستنباطي وهذا هو السبب في تفضيل المنهج التجريبي بعامة . ولو لم يكن الأمر كذلك لطلب المرء بالفطرة تأييد ما قد يصل إليه بالمنهج التجريبي بواسطة نسق في النظريات .

ويميز ساجيريه بين حب الاستطلاع البشري وحب الاستطلاع الهندسي فبينما يهتم حب الاستطلاع البشري بملاحظة الحالات الجزئية أكثر من اهتمامه بالحالات العامة نجد حب الاستطلاع الهندسي يهتم على العكس بتجميع الحالات الجزئية والنظر إليهالا في عموميتها . وهذا لم يفعله الهندسيون الكالدانيون والمصريون والصينيون عندما تعلق الأمر بالمثلثات القائمة الزوايا مثلاً ، فلم يهتموا بما هو عام ، بل اهتموا بالخصائص الفريدة في هذا العام .

وهذا ما يفسر أن حالات خاصة لمثلث قائم الزاوية جذبت انتباه المصريين والصينيين منذ ثلاثة الآف سنة أو الفي سنة قبل الميلاد .

ويقول ساجيريه أنه من الثابت الآن بالاجماع أن الكالدانيين قد توصلوا إلى تثليث السطوح ، وأن المصريين قد توصلوا إلى قياس كل أنواع الحجوم ، وعرفوا خصائص الوتر في حالتين من حالات المثلث القائم الزاوية من الألف الثالث قبل الميلاد . فلو أثارت الهندسة التجريبية بفعل الأشياء حب استطلاع هندسي ، كالذي عرفنا خصائصه ، لوجد اليونانيون في كالدانيا ومصر هندسة علمية . اشتغل بها سكان هذه البلاد لمدة ألفي سنة ، انتظرت مجيء اليونانيين ليحملوها كاملة ، حيث أنها قدّمت كل ما يمكنها أن تقدم . ولكن مثل هذا الكمال والرواج لم يحدث في رأي ساجيريه .

إلا أن هناك من المفكرين من يعتبر وجود هذه الهندسة ورواجها حقيقة تاريخية واضحة ، ولكنهم يبررون اختفاءها كلية وذهبوا إلى أن هذا العلم كان بين المذاهب الأكثر غيبية التي حفظ الكهنة أسرارها غيرة عليها .

ولكن رب معترض يقول وهل الهندسة أكثر غيبية من علم الفلك؟ وهل يستطيع الكهنة المصريون أن يمارسوا الهندسة التجريبية ، دون أن يخالطها شيء من تأثير علمهم النظري ؟ (إذا كان لديهم علم نظري) ويضيف ساجيريه : لو كان الأمر كما توهم هؤلاء المفكرين لحصل أحدهم على بعض تعاليمهم في مذكرة كما هو الحال في بردية أحمس ، التي هي نفسها ليست إلا مجموعة دروس . وكيف أن اليونانيين لم يحصلوا على بعض مذكراتهم وكان من السهل على مهندسييهم الفطناء أن يكتشفوا فيها تتابع النظريات

التي جهلوها ، وأن يعيدوا تركيبها ، ونعـرف هذا أمـا بنظرة للعلم الهيلليني ،وإما بشهادة اليونانيين ، أنفسهم الذين يشهدون بكل بساطة باستفادتهم من العلم الخارجي ، علاوة على أنه لا يتصور ، حسب قول ساجيريه أن يظل الإسكندريون في انفصال عقلي وروحي عنهم ، فلا يعرفون أسرارهم . أن أسرار العصر قد وصلت إلى الروح اليونانية ولكن لم نصادف وراء الحجاب الذي يخفي الغيبيات ، هندسة أو جبر ، أو أي علم آخر سوى علم الغيب ، هـذا فيما يختص بالمصريين .

أما من ناحية الكالدانيين ، فإن اليونانيين قد دخلوا بابل ووجدوا فيها شيئاً جـديداً كـل الجدة بـالنسبة إليهم ، وهـو علم التنجيم ، ولكنهم لم يجدوا رياضيات ، بالمعنى الدقيق للكلمة ، تختلف عن الرياضيات التجريبية ، التي كانت تمارس وقت ذلك . ولقد كشف الكالدانيون لليونانيين فن قراءة المصائر الإنسانية في النجوم . أما أنهم قد أخفوا عنهم توافق الأعداد والأشكال ، فهذا معناه أنهم كانوا يحاولون عن قصد ألا يبرهنوا على تقـدمهم على اليونانيين في علـم ، لم يكونوا فيه حديثي عهد .

ويرى ساجيريه أن الحجج كثيرة ولا ضرورة لا يراد المزيد منها أو تكرارها بالنسبة لغير الكالدانيين والمصريين ، فما قاله عليهم يصدق أيضاً على الصينيين ، وعلى الهنود ، وإن كانت حضارتهم متأخر نسبياً .

ويستنتج ساجيريه من ذلك أن اليونانيين لم يكونوا مسبوقين بأي من الشعوب الثلاثة الكبرى . وأعني الكالدانيين والمصرين والصينيين . وهي التي كان في إمكانها أن تقيم قبلهم علماً حقيقياً ،

وإن اليونانيين هم وحدهم الذين يدعون للدهشة والإعجاب، لما لهم من فضل المبادأة ، أما الآخرون فليس لهم فضل غير عادي ، فكلما تطورت الحياة الاجتماعية ظهرت حاجات جديدة . وكان على هؤلاء أن يبحثوا عن قواعد عملية كافية لها . وعندما توضع هذه القواعد كان يؤخذ بها ولكنهم لم يحسنوا في هذه القواعد الفنية . ويرى ساجيريه أن مهارتهم دعت إليها الضرورة . وهي غير كاملة بل قاصرة . لأنها جعلت الضروري أمراً من السهل الحصول عليه ، وعندما كانت تعوقها المصاعب والعقبات كانت عديمة الحيلة ، ويختم ساجيريه نقده قائلاً : إننا لا نحتقر إذن الذكاء الكالداني والمصري والصيني حين نقرر أنهم لم يدفعوا رياضياتهم خارج حدود النزعة التجريبية .

دعنا نناقش ساجيريه، أنه لا يسلم بإمكان قيام العلم النظري عند الشعوب الشرقية القديمة ، ويعلل عدم اشتغالهم به عدم امتلاكهم لحب الاستطلاع الهندسي الذي كان عند اليونان ولم يبين لنا سبب امتياز اليونان بحب الاستطلاع الهندسي على غيرهم . إلا بمسألة عدم مرض اليونان بذلك المرض الذي يمنعهم من البرهنة النظرية ويجعلهم يكتفون بالتحقيق التجريبي ، ولما كان المرض هو الشاذ والصحة هي القاعدة كان عدم المرض أمراً طبيعياً وكان حب الاستطلاع الهندسي على عكس ما يرى ساجيريه أمراً عادياً من المفروض أن يكون موجوداً عند كل إنسان لم يُصَب بالمرض . هذا علاوة على أن حب الاستطلاع الهندسي هو مجرد فرض لم يقل به أحد غير ساجيريه ، ولم يقم دليلاً على وجوده ، ولذلك لا نسلم به ، ولا نقبل ما ينبني عليه .

كما أن الحاجة العملية قد تدفع الإنسان أحياناً إلى تغيير في المنهج الذي يتبعه وهو نفسه يرى أن الحاجات العملية قد تدفع إلى البحث عن قواعد كافية لها . وإذا كان حب الاستطلاع الهندسي ليس نظرياً وتلقائياً ، فهل هو مكتسب ؟ وكيف اكتسبه اليونان ؟ وإذا كان اليونانيون هندسيين قبليين فلماذا ننكر على قدماء الشرقيين ذلك ؟ ولماذا كان اليونان دون غيرهم قبليين ؟ لم يدع أحد أن الهندسة اكتملت عند قدماء الشرقيين . وإنما قال الكثير من العلماء بوجود علم نظري عندهم أخذه عنهم اليونانيون فعلاً يعتمد ساجيريه في تأكيده على أن اليونانيين لم يجدوا شيئاً عند قدماء الشرقيين ولماذا يخلط بين مجرد الوجود ووجود الكامل . كما أن من الممكن أن تكون بعض الوثائق التي تحوي علماً نظرياً قد فقدت لا سيما أنها قليلة وغير شائعة وأن يكون الذي وصل إلينا فقط هو بعض البرديات التي تحمل الطابع العلمي لا سيما أن هذه شائعة. وما هو رأي ساجيريه في شهادة بعض اليونانيين بأن طاليس وفيثاغورث حملا العلم من الشرق ؟ ولماذا يطلب ساجيريه من الكالدانيين أن يبرهنوا على تفوقهم في الرياضيات ؟ إن هذا يتنافى مع صفات العالم الحقيقي التي من أهما التواضع. وإذا كان اليونانيون غير مسبوقين في هذا المضمار فكيف نفسر ظهور العلم الكامل عندهم . وهل يؤمن ساجيريه بالمعجزات ؟ ..

ويذهب بيير بونزو مذهب ساجيريه، فيؤكد أن تاريخ التفكير الرياضي لا يمكن أن يكون قد بدأ قبل المكتشفات الهيللينية العظيمة ، فالمصريون قد عرفوا الوقائع الرياضية وصاغوا المعادلات ، وبرهنوا على أشكال هندسية . ولكنهم استهدفوا غايات

نفعية وعملية . ويبـدو أنه لم يكن لـديهم تصور متمـايز عن العلم النظري ، ولا مثل أعلى علمي ، ومع أن المسائل التي شغلوا بها خرجت منها تيارات التأمل الـرياضي لكنها لا تهمنا ، بينما تهمنا هذه التيارات ابتداء من اللحظة التي تكون لها وجهة وتوجيه منهجيان .

إن ما نقل عن العصور القديمة يجعلنا حسبما يرى «جاستون ميلهو» لا نقبل الفكرة التي تقول أن العلم اليوناني قد استعار شيئاً من هذه الشعوب. فالنقد الحديث المنصب على علوم الشرق لم يستطيع أن يتوصل إلى شيء يخالف هذا المنقول ولكن عندما بدأنا نفهم تكرار وأهمية العلاقات التي كانت موجودة في جميع المجالات بين اليونان والشرق ، فهما أفضل ، وعندما نعيد تركيب بعض المسائل المعقدة جداً ، التي توصل إلى حلها الكالدانيون والمصريون والهنود وربما الصينيون ، فإننا قد نذهب ، فيما يرى ميلهو إلى الرأي المقبول عند معظم المفكرين ، والذي يقرر أن اليونانيين لم يسـرفوا في إظهـار المكتشفات التي ينسبونها لهذه الشعوب .

إن مثل هذا الاعتقاد، وأعني اعتقاد الأسراف، قد أطاح به التقدم الهائل في تاريخ الرياضيات ، فمنذ أبحاث بول تانيري P. Tannary صار المرء لا يشك في الطابع للرياضيات الاغريقية ، ولكن هل نقبل أنهـا خـرجت من العـدم ، وأنهـا لا تـدين بشيء لـطرق القيـاس والحساب ، التي مارسها الحسابون والهندسيون الشرقيون ؟ .

لقد كان بول تانيري وجاستون ميلهو يعتقدان أن ذلك سائر في اتجاه ايرنست رينان E. Renan الذي عبر عن رأيه في كتابه «مستقبل العلم». أن رينان لم يجد تفسيراً يبرر به ظهور العلم عند اليونانين

فجأة ، كقضايا عامة يبرهن على صدقها ابتداء من قضايا بدون برهان ، غير قوله : « إن هذا هو المعجزة اليونانية » وأصبح هذا التعبير شائعاً بين المؤلفين الأوروبيين، الذين يشاطرونه الرأي في أن العلم كنظر وبرهان نظري قائم على حقائق عامة لم يكن مسبوقاً في تاريخ غيرهم فهو المعجزة اليونانية .

ولقد ظل بول تانيري وجاستون ميلهو يعتقدان ذلك إلى أن ظهرت ألوان أخرى من النقد رفضت قبول فرض المعجزة اليونانية ، مستندة إلى المبدأ القائل بأن لا شيء يخرج من لا شيء . وقد قام بهذا النقد أميل بيمار الذي يرى أنه ليس من الصواب أن ننسب شرف ابتكار العلم العقلي المنزه عن الغرض إلى الاغريق بمعجزة يونانية ، كما يرى ايرنست رينان ، فقد أصبحنا أقل اعتقاداً في هذه الانفصامات . فالدراسات الحديثة جعلتنا نعتقد في تطور بطيء في العلم والفن. وقد استند في ذلك إلى ما يراه عند طبيعيي المدرسة الأيونية في معرض كلامهم عن مبادىء الأشياء من مواصلة لعمل التبسيط والرد ، الذي قامت به الديانات الشرقية القديمة، وبخاصة الديانة المصرية . وكان طاليس وانكسمانديريس وانكسمانس حلقة الوصل في ذلك .

إن هذا دعا أميل بيكار إلى القول بوجود علم نظري لدى المصريين احتفظ به الكهنة . وأخذه عنهم اليونانيون .

وقد أثبت العالم الروسي كاربنسكي Karpinski ذلك أيضاً وأكد بالدليل القاطع أن اليونانيين قد أخذوا عن الشعوب الشرقية ما وجدوه عندهم من حساب ومن جبر ، وما كان فضل فيثاغورث إلا تطوير ما أخذوه عن المصريين وعن الهنود بخاصة وما كان فضل ديوقطس إلا

أنه استخلص الجبر من كتابات الكالدانيين والهنود بالأخص . وقد كان عند الهنود مدرسة للجبر عظيمة .

وكان من جراء ذلك أن غير « ميلهو » فكرته القديمة ، التي نشرها في كتابه « دراسات عن أصل العلم الاغريقي » سنة ١٨٩٣ ثم نشر آراءه الجديدة سنة ١٩١١ في كتابه « دراسات جديدة عن التفكير العلمي » . ولقد ذكرت آراءه وما أصابها من تغيير والجدير بالذكر أن نقول أن ما نشر من أبحاث جديدة عن هندسة الهنود جعله يغير رأيه ولم يعد بول تانيري وميلهو يعتقدان في أصالة المعجزة اليونانية .

ويذهب ليون روبان إلى أن ما أخذه العلماء الاغريق من الشرق هو المواد ، التي كدستها التجارب القديمة ، مما كان بمثابة مسائل مقترحة للتفكير المنزه عن الغرض ، بدونها ما كان للعلم اليوناني أن يتكون ، وبذلك لا نستطيع أن نتكلم عن معجزة يونانية . ولا ينكر روبان على العلماء الأوائل التفسير العقلي وعدم اقتناعهم بالعمل اقتناعاً مباشراً ، واعتبر التفكير أو التأمل الذي مارسوه سراً من أسرار العمل .

وقد قسر هذا التفكير المجرد المنزه على الكهنة ، كما سبق أن ذكرنا ويذهب تاتون إلى أنه كان هناك بلا شك تأثير للرياضيات الشرقية على الرياضيات الهيللنية ، ولكننا لا نستطيع أن نحدد مدى هذا التأثير لقلة الوثائق التي تحت ايدينا . كما يذهب إلى أنه كان للكالدانيين منهج نظري عام طبقوه في الجبر .

ويذهب الرياضي المعاصر بيل إلى أن هناك تأثيراً للرياضيات البابلية والرياضيات المصرية على الرياضيات اليونانية . ويذكر أن

فيثاغورث قد زار بابل ومصر وتعلم من أهلها الكثير وأنه قد أخذ عن البابلين الدعوة إلى ضرورة استخدام البرهان في الرياضيات وكان البابليون ، فيما يذكر أول من دعا بالحاج إلى ذلك.

وإني أرى بعد ما ذكرت من آراء العلماء والمفكرين المحدثين أن العلم الرياضي قد تأثر بالعلم الشرقي ، وأنه قد أخذ مادة صاغها العلماء الأغريق على نحو جديد ، لإدراكهم لفكرة العلم كحجة وبرهان أو استدلال نظري على صدق قضية ما صدقاً عاماً أي في كل التطبيقات الجزئية ، التي يمكن أن نصادفها ، وذلك بدلاً من الاكتفاء بوصفات عملية وقواعد تجريبية غير أكيدة . وقد كان لليونانيين ذلك لحبهم الجدل والمناظرة ، ولنشأتهم في بيئة سياسية لا نظير لها عند غيرهم فيها نقاش شديد بين المدن المستقلة المختلفة . كما فيها حرية فكرية تسمح بنقاش حر طليق بين أفراد المدينة الواحدة . وهذه البيئة السياسية جعلتهم ينمون ملكة النظر العقلي وفنون البلاغة والدراما والسفسطة والفلسفة ، وغير ذلك من وسائل التأثير على الجماهير ، فأدى بهم ذلك إلى الجدل والمنطق وبالتالي إلى اكتشاف فكرة العلم نفسه كحجة وبرهان . وهكذا ظهرت فروع المعرفة عندهم ، وعلى رأسها الرياضيات التي تبرز فيها العقلية النظرية البرهانية .

وإذا كان هذا تفسيراً لايضاح فكرة العلم عند اليونانيين كحجة وبرهان فليس معنى ذلك أن الشعوب الشرقية القديمة لم تدرك هذا ، وإنها لم تمارس التفكير المجرد ، ففكرة العلم كانت أوضح عند اليونانيين لأنهم مرحلة متأخرة نسبياً من تاريخ العلم . فاستفادوا من تجارب وخبرة غيرهم ممن سبقوهم وربما وجد العلم النظري

قبلهم ، ولكن الوثائق لا تسعفنا ، كي نؤكد ذلك وهذا احتمال تؤكده شهادة اليونانيين المعاصرين لمؤسسي العلم اليوناني الذي اعترفوا بأن العلم اليوناني هو العلم المصري ، وما كان لطاليس وفيثاغورث من فضل إلا حمله إلى بلاد اليونان .

ولذلك فإني أرفض رأي ساجيريه الذي لا يرى للعلم الشرقي القديم أي فضل وهو يرفض فرض حفظ الكهنة لأسرار العلم النظري بحجج قد تبدو قوية ، اعتماداً على سكوت الوثائق التي لدينا ، وعدم إفصاحها عن العلم النظري ، ولكن أليس من الممكن أن يكون هناك وثائق أخرى لم تكتشف بعد ؟ وهل الوثائق المكتشفة للآن هي كل العلم الشرقي القديم ؟ وهل نكذب قوماً عاصروا العلم في تكونه وانتقاله من الشرق إلى اليونان واعترفوا ـ على عكس ما يرى ـ بما للشرق من فضل ؟ فكيف يُغْفِل هذه الشهادة أو يدعي أن اليونانيين لم يصرحوا بأنهم أخذوا شيئاً . وهل من يأخذ دائماً يصرح بأنه أخذ ؟ كما أرفض تعليل ساجيريه لقيام الهندسة كعلم برهاني عند اليونان دون غيرهم لأن دليله يعتمد على شيء غير مسلم به ؟ فيحتاج إلى دليل . ولأنه يجعل الشاذ قاعدة ، ويجعل المرض شيئاً طبيعياً وعاماً ويجعل الصحة شيئاً خاصاً .

كما أنني أرفض كذلك فرض المعجزة اليونانية لما تقدم من الأسباب ، ولأن العلم لا يمكن أن يظهر فجأة ، فالإيمان أن يخرج شيء من لا شيء، فحتى الابتكار يقوم على ما هو موجود فكيف ننكر هذا الوجود ونعترف بعدم خرج منه العلم اليوناني بمعجزة يرفضها العلم لشدة ما بها من تفسير غيبي خارق للطبيعة وليس اليونان بملائكة أو بأنبياء ورسل حتى يأتوا بما هو خارق للطبيعة .

والخلاصة أن العلم اليوناني ومنهجه قد مر بمراحل تطور ، وكانت بداية نشأته ونشأة منهجه بالأخص عند الكالدانيين وعند المصريين ثم انتقل إلى اليونان فدخل مرحلة جديدة وهامة من مراحل تطوره وتطور منهجه وعلينا أن نقوم بدراستها .

ثالثاً : المنهج الرياضي عند اليونان :

لا يستطيع الباحث ، إذا أراد أن يدرس الرياضيات عند اليونان ليتعرف على منهجها أن يتراجع إلى ما قبل القرن السابع قبل الميلاد ، فليست هناك وثائق عن الفترة السابقة ، وفي القرن السابع قامت في المدن الأيونية مدارس فلسفية يتدارس فيها الناس مبادىء العلوم المختلفة ويبتكرون النظريات الفلسفية والكونية . وفي بداية هذه الفترة تكرر الاتصال مع الشرق في حدود ضيقة ، وكان العالم الاغريقي خاضعاً في بداياته للتأثيرات الكالدانية والمصرية . وهذه التأثيرات ، كما ذكرنا ، هامة بالتأكيد لأن الطرق الفنية للرياضيات الشرقية كانت كاملة ، إلا أن الشواهد التي لدينا ، والتي تؤكد هذا الاتصال بعدية ، فلا تسمح لنا أن نحدد تلك التأثيرات ، ولكن سرعان ما ظهر اختلاف جوهري بين الطرق الفنية الشرقية والعلم الاغريقي الناشىء فبينما توجهت الشعوب القديمة بمجهوداتها نحو حل المسائل العملية احتقر الاغريق المسائل المحسوسة واتجهوا بأبحاثهم نحو التأمل المجرد المنزه عن الغرض والعمل . وقد ظهر العلم الرياضي لهم على أنه العلم الكامل . ولقد اهتم اليونانيون اهتمام بالغاً بتنظيم المكتشفات الرياضية تنظيماً برهانياً واستدلالياً أكثر من اهتمامهم بالكشف عن حقائق جديدة لم يعهدها من قبل وقد أضفت عليه سمواً مثالياً وحققت له استقلالاً واكسبته كمالاً وجمالاً .

علينا إذن أن ندرس الرياضيات الاغريقية منذ القرن السابع قبل الميلاد لكي نعرف طبيعة منهجها ، وصفاته وصفات الأسس التي يعتمد عليها . وهل كان حدسياً أو منطقياً .

ويبدو أن المنهج عند الاغريق أوضح في الهندسة منه في الحساب ، لأن الاغريق على ما يبدو طبقوه في الهندسة بدرجة أكبر ، ولأنهم عالجوا النظريات الحسابية للأعداد كنظريات تخص الأشكال ، فنحن نجد في أصول اقليدس في الفصل السابع إلى العاشر نظريات عن الحساب الخالص معروضها كقضايا ، تتناول قياسية وعدم قياسية الخطوط. فالعدد الأصم لا جذر له عولج ابتداء من الفيثاغوريين على أنه خاصية لقطر مربع طول ضلعه يساوي الوحدة. ونجد أيضاً اقليدس يعالج المساواة بصورة هندسية، كما عالج الاغريق المسائل الجبرية معالجة هندسية ، مما عرف بالجبر الهندسي حيث يقوم تمثيل المقادير بواسطة خطوط مقام الرموز الجبرية ، وحيث يكفي ذلك لجمع وطرح المقادير المنطقة (الجذرية) وغير المنطقة (الصماء) بوضع أحد الخطوط على الخط الآخر وعلى امتداده ، وحيث مثل ضرب المقادير بالمستطيلات والمربعات . ويبدو أن إهمال اليونان لفروع الرياضيات الأخرى برجع إلى عدم كفاية نظامهم العددي . وهناك احتمال آخر ، هو أن الهندسة قد طورت في أول الأمر لأن مجهود التجديد الذي تتطلبه أقل كثيراً من المجهود الهائل الذي يتطلبه الجبر والتحليل ، وكان من جراء ذلك أن قابل الرياضيون المتأخرون جداً صعوبة في تحرير أنفسهم من هذا الاعتماد المسرف على الحدس المكاني .

من العبث إذن ـ للأسباب المتقدمة ـ أن ندرس منهج الحساب والجبر عند الأغريق مستقلاً عن منهج الهندسة ولذلك رأيت أن اكتفى هنا بدراسة الهندسة الاغريقية ومنهجها دون الحساب والجبر ، وسوف اكتفي بأن أشير إليهما في الفصل التالي عندما أعالج التطورات التي حدثت في المنهج الرياضي بعد اقليدس .

وسوف أعالج في هذه النقطة الهندسة ومنهجها قبل اقليدس فأبين كيف تصور اليونانيون المنهج العقلي ، وكيف طبقوه في عرض الهندسة ابتداء من طاليس أو بالأصح فيثاغورث ، وكيف أسهم كل من زينون وأبقراط الكيوسي وأفلاطون وايدوكسوس في بلورة المنهج ، الذي سوف يظهر في صورة مكتملة إلى حد ما على يد اقليدس . وهنا ننتقل إلى الجزء الثاني من هذه النقطة حيث ندرس المنهج الرياضي عند اقليدس كما جاء في كتابه الأصول ، فأبين تصوره للمنهج . وما وضع له من أسس وما هي طرقه في البرهان على المسائل والنظريات الرياضية وأوضح ما قد يكون من تشابه واختلاف بين منهج الهندسة وبين منطق أرسطو ، وما هي النقط الحدسية التي تضمنتها هذه الهندسة . وبذلك تتضح لنا صلة المنهج الرياضي ، في مرحلة من مراحل تطوره واكتماله ، بكل من المنطق والحدس .

ولن أتكلم عن المنهج الرياضي عند رياضيي اليونان بعد اقليدس من أمثال أبولونيوس وبابوس وغيرهما ، لأنه الاغريق قد أخذوا بمنهج اقليدس . وقد ظلت أصوله في نظرهم مثالاً يحتذى للعرض والاستنباط الذي يمتاز بدقة الاستدلالات والبراهين .

(أ) المنهج الرياضي قبل اقليدس :

يرى بعض مؤرخي الرياضيات أنه لم تكن هناك هندسة جديرة بهذا الاسم قبل اقليدس (أواخر القرن الرابع أوائل القرن الثالث ق . م) الذي تصور الهندسة التي لم تسهم فيها النزعة التجريبية تسلسلاً في القضايا التي يبرهن على كل منها بيان اعتمادها على سابقتها ، وهكذا حتى يعتمد البناء كله على التقريرات الابتدائية غير القابلة للرد . وأعني التعريفات والبديهيات والمسلمات .

إلا أن هناك شواهد كثيرة تؤكد أن الهندسة الاغريقية كانت مزدهرة قبل اقليدس ، وإن الإضافة الشخصية لأقليدس ، كانت ، مهما يكن من قيمتها ، شيئاً بسيطاً بالنسبة لما كانت عليه هذه الهندسة قبله .

لقد كان هناك حتى القرن الخامس تياران رئيسيان في الرياضيات الاغريقية تيار المدرسة الايونية وتيار المدرسة الايطالية . وقد بدأ التيار الأول بالرياضي الأول طاليس ، ويتمثل الثاني في الفيثاغورية . وقد صدر التيار الأول عن آسيا الصغرى منذ القرن السابع قبل الميلاد ، ولكن يبدو أن كل المعارف الرياضية التي ينسبها المؤلفون القدماء إلى فلاسفة آسيا الصغرى هي قضايا متفرقة ، لا نجد بينها أي ترابط منهجي ، أنها صياغة للهندسة التجريبية الحدسية البحتة ، ومن المحتمل أن تكون هذه المعارف مأخوذة عن المساحين المصريين المشهورين . ولقد حدثت في القرنين السابع والسادس قبل الميلاد اتصالات تجارية بين المدن الأيونية ومصر . وكان للاغريق مستعمرة في مصر ، عرفت باسم نواقراتيس Namcratis وأصبح الاغريق بإقامتهم في نوقراتيس وبرحلاتهم داخل البلاد على اتصال بالطريقة الفنية المصرية .

ولقد زاد طاليس (٦٢٤ ـ ٥٤٨ تقريباً) مصر ، ويقال أن طاليس أوجد ارتفاع أحد الأهرامات بالاعتماد على الظل مستخدماً في حسابه نظرية النسب التي قد تكون من اكتشافه . ولكن من الأكثر احتمالاً أن يكون طاليس قد تعلم تقدير ارتفاع الهرم من المصريين العمليين فليس في هذه الطريقة شيء يخالف على الأقل الهندسة الحدسية التجريبية التي توصل إليها المصريون .

ويشك في أن يكون طاليس قد امتلك المعرفة النظرية للقضايا الهندسية الخاصة بتشابه المثلثات التي تفترضها هذه الإجراءات العملية. ولقد نسب إلى طاليس الكثير من النظريات كنظرية المثلث المرسوم داخل نصف دائرة وغيرها ، ولكن هناك ا احتمالاً ضعيفاً في أن يكون قد تعدى وجهة نظر العلم البابلي والمصري ، وأن يكون قد جعل الهندسة تجتاز المرحلة الحاسمة التي تكون مدينة بها له .

وعلى الرغم من القضايا الكثيرة التي ينسب اكتشافها إلى الفلاسفة الايونيين ، فإن دراسة التيار الايوني لا يبين مرحلة تكون الهندسة العملية الاغريقية . فلننتقل إلى التيار الثاني ، وأعني الفيثاغوري .

لقد ظهرت مراكز عملية جديدة في القرن السادس في مستعمرات اليونان الكبرى في إيطاليا الوسطى ، فقد أسس فيثاغورث (٥٨٦ ـ ٥٠٠) مدرسة فلسفية صاغ فيها أسس الرياضيات وتابع تلاميذه عمله فبرهنوا على بعض النظريات الهندسية ودرسوا خصائص النسب .

ولدينا عن الهندسة الفيثاغورية كتيب هام هو المنقول عن فيثاغورث . يقرر أوديموس الروديسي Endemede Rhodes أنه سابق

على اقليدس ويؤكد بول تانري أنه ينتسب إلى فيثاغورث نفسه ، ويقرر أنه يتضمن الإطار الكامل لأصول اقليدس ، ويرى لوسيان جودو أن هناك مجرد تشابه بين الهندسيين .

فتصورات النقطة والخطوط والسطوح في هندسة فيثاغورث كانت من طبيعة مختلفة ، فلم تكن النقطة بالنسبة للفيثاغوريين دون أبعاد ، كما في هندسة أقليدس . إنها نقطة ممتدة تتفق مع الحدس التجريبي لحبة رمل . وهذه النقطة هي وحدة ولها وضع ، وتسمى موناد . وكان السطح يدرك على أنه تتابع من المونادات وكان السطح المتكون بحركة الخط نوعاً من شراع سميك إلى حد ما .

وينسب جميع مؤرخي الرياضيات إلى فيثاغورث دوراً هاماً في إقامة الهندسة وهم لا يختلفون في هذا الدور إلا إذا حاولوا تقديره وتحديده يقول جاستون ميلهو أن العمل الهندسي لفيثاغورث يكبر باستمرار بسبب تتابع أبحاث النقد الحديث ، وكذلك فإن جزء المعارف الاقليدية الذي ينسب إليه دون إمكان تعديده بدقة يبدو إلينا اليوم عظيماً جداً .

ولا يمكننا ـ فيما يقول ساجيريه ـ أن نشك اليوم في أن الفكرة الأولى لهندسة مترابطة على طريقة اقليدس ، هندسة تجريبية تتسلسل بالبرهان هندسة حقه ، قد فرخت في عقل فيثاغورث . ذلك أن فيثاغورت قد صعد إلى المبادىء العليا ودرس المسائل بطريقة مجردة وبالعقل الخالص وهذا هو السبب الذي من أجله كان فيثاغورث فيما يقول أوديموس ، مبتكر الهندسة . فهو يستدل على أفكار مجردة وعلى جواهر مثالية ، دون أن يهبط إلى اعتبار الأشياء المحسوسة . فلم تتحقق بوضوح قبل فيثاغورث ضرورة بدء الرهان

من الافتراضات أن فيثاغورث تبعاً للمنقول الثابت هو أول أوروبي يصمم على ضرورة وضع البديهيات والمسلمات في بداية الهندسة المتقدمة وعلى ضرورة أن تبدأ أول خطوة في التقدم بتطبيق استدلال استنباطي دقيق يقوم على البديهيات .

لقد أدخل فيثاغورث إذن البرهان في الرياضيات . وقبله كانت الهندسة مجمرعة من القواعد العملية التي توصل إليها الإنسان تجريبياً ، دون أية دلالة واضحة على الصلات المتبادلة بين هذه القواعد ، ودون أدنى تفكير في أن الكل قابل للاستنتاج من مجموعة صغيرة نسبياً من البديهات والمسلمات. لقد سلم المرء بالبرهان وضرورة الاستناد إليه . واعتبر البرهان بمثابة روح للرياضيات ، بحيث أصبح من الصعب أن تتصور الشيء البدائي الذي يسبق الاستدلال الرياضي .

لقد اكتشف فيثاغورت البرهان المجرد للعلاقة ، التي عرفها المصريون والصينيون والهنود ، وأعني علاقة وتر المثلث القائم الزاوية مع أضلاعه، فبرهن على أن المربع المقام على الوتر يساوي مجموعة المربعين المقامين على الضلعين الآخرين ، لا في الحالات الثلاثة التي عرفت ، ولكن في جميع الحالات ولقد عرفت الفيثاغورية كذلك الحال البرهاني لكثير من النظريات والمسائل بلغة أدخلتها الفيثاغورية في الهندسة .

درست الفيثاغورية المجسمات والأشكال واكتشفت عدم قياسية قطر المربع ، وعدم قياسية وتر المثلث المتساوي الساقين الذي طول كل من ساقيه هو الوحدة . وقد أدى بهم ذلك إلى التفكير في الأعداد الصماء .

ولكن نظرية فيثاغورث كانت تحمل بين ثناياها كثيراً من المشاكل التي صدمته وأوقفت تقدمه . فعندما وصل إلى أبسط المربعات وأجملها ، وهو المربع الذي طول ضلعه يساوي الوحدة ، وحسب قطره ، الذي هو وتر مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين ، وجده حسب نظريته $\sqrt{٢}$ ، ولم يستطع أن يجد عدداً لهذا الجذر ، أو بمعنى آخر لم يستطع أن يقيس قطر المربع البسيط ويعبر عنه بعدد صحيح أو بعدد حق . ذلك لأن الجذر التربيعي للعدد ، هو عدد أصم ، أي غير مساو لأي عدد صحيح أو لكسر عشري أو لمجموع الإثنين، أعني لعدد صحيح وكسر عشري . ومعنى ذلك أن قطر المربع في هذا الشكل الهندسي قد تحدى الأعداد الصحيحة ، إذ أننا نستطيع أن ننشىء القطر هندسياً ، ولكننا لا نستطيع أن نقيسه بعدد منتهٍ من الوحدات إذ جذر العدد ، لا ينتهي . وهذه الاستحالة قد أوجدت البحث في العمليات التي لا تنتهي والأعداد الصماء ، التي جذبت أنظار الرياضيين . ولقد وضع فيثاغورث بهذا الاكتشاف جذور التحليل الرياضي الحديث .

وفي القرن الخامس قبل الميلاد ظهرت المدرسة الإيلية ، وكان من أشهر ممثليها بارمنيدس وتلميذه زينون وينسب إلى بارمنيدس أنه أول من عرف أن النقطة والخط والسطح وكافة الأشكال الهندسية ليست لها إلا وجود مثالي .

وينسب الفيلسوف الاسكندري بروقلس (٤١٢ - ٤٨٥) إلى بارمنيدس التعريف الذي نجده في كتاب اقليدس القائل : النقطة ليست لها أجزاء .

ويأتي تلميذه زينون فيؤثر على الهندسة بخاصة وعلى الرياضيات

بعامة من جهتين : فهو أولاً مكتشف المنهج الجدلي المستخدم في الهندسة بخاصة على نطاق واسع . وخلاصة هذا المنهج أننا نضع مسألة معينة لها إجابة محتملة يوافق عليها المخاطب المفترض . ثم نستنتج منها النتائج التي تتضمنها . ونبيّن أن هذه النتائج المتعارضة فيما بينها تعارض القضية الأصلية ويؤدي إلى قبول القضية المقابلة ، التي ليست أقل احتمالاً من الأخرى . ويقوم هذا المنهج على مبدأ التناقض الذي استخدمه بارمنيدس . وهذا المنهج يقفل أمام المجادل أحد الطريقين المقابلين بحيث لا يبقي إلا طريق واحد، يضطر إلى السير فيه . وهذا المنهج جدلي . إلا أن الغرض منه ايجابي . وهذا المنهج في الأصل لا يوصل إلى الحقيقة بل إلى قضايا محتملة احتمال القضايا المقابلة . ومع ذلك قد أخذ به ولم يرفض كباقي المغالطات ، واعتبر زينون لذلك في نظر القدماء مكتشفاً لمنهج عظيم حيث أنه قدم صورة فنية لعملية المناقشة التي كانت تمارس جزافاً ويدون وعي وهذا المنهج هو ما يعرف ببرهان الخلف . وقد استخدمه زينون في حججه أو نقائضه الثمانية كما استخدمه اقليدس من بعد في البرهان على بعض نظرياته ، ومازال هذا المنهج يستخدم في الهندسة وفي المنطق الرياضي إلى اليوم .

(ب) أما من الجهة الأخرى فقد أثار في حججه ، التي أراد أن يدافع بها عن قضية أستاذه بارمنيدس الذي ينكر الكثرة والحركة ، قضايا هندسية حيرت رياضيي عصره والعصور التالية، ولم تحل إلا بعد أكثر من عشرين قرناً . لقد بين زينون بحججه استحالة أن تنطبق الكثرة غير المتصلة والكثرة الفيثاغورية وحتى الكثرة الديموقريطية المتناثرة على الواقع المتصل للمكان ، الذي تنتقل فيه الأشياء ، كما

برهن على عدم معقولية الحَركة باستحالة لا نهائية التركيب . وقد وجهت هذه النقائض ضربة قاضية للموناد الفيثاغوري .

ويلاحظ مع زيتن Zeuthen أن (هذه) النقائض تتضمن معرفة مجموع المتوالية الهندسية اللامتناهية . كما نلاحظ أن هذه المعضلات الرياضية التي صيغت بلغة فلسفية قد صدمت البشرية دون قصد بفكرتي الاتصال واللانهائية لقد زحفت هذه المتناقضات مع تصورات الاتصال واللانهائية إلى الرياضيات ويقال أن ايدوكسوس قد تغلب عليها بنظريته في النسب والتناسب ولكنها ظهرت من جديد . كما يقال أن النظرية الوضعية في اللانهائي التي ابتكرها جورج كانتور في العصر الحديث . ونظرية الأعداد الصماء التي ابتكرها فاير ستراس وديكند في العصر الحديث قد تخلصت من هذه الصعوبات إلى الأبد . وتلك جملة لا تقبلها جميع مدارس الرياضيات اليوم لأن هذه النظريات لم تقض تماماً على المتناقضات ، بل أدت في نفسها إلى بعض المتناقضات ولقد انقسم الرياضيون قديماً وحديثاً فيما يقول بيل بسببها إلى فريقين فريق اهتم بالنقد الهدام ورفض الأخذ بالتحليل وحساب التكامل وفريق حاول التغلب على المشاكل والصعوبات ، ويعتبر الرياضي المعاصر بروفر تلميذاً حديثاً لزينون الذي اهتم بالنقد الهدام كما يعتبر فايرستراس وديدكند وأمثالهما تلامذة لايدوكسوس ويعتبر نيوتن وليبنتز وأمثالهما تلامذة محدثين لايدوكسوس وارشميدس .

وفي القرن الخامس أيضاً نجد أبقراط الذي يقول بروقلس عنه : أنه أول من ألف مبادىء أو أصولاً هندسية ، وأنه كان معاصراً لتيودور معلم أفلاطون .

ولقد بحث أبقراط في السطوح التي تحصرها منحنيات قابلة لأن تكون مربعات ، كالدائرة مثلاً التي حاول اليونانيون أن يربعوها ، أعني أنهم حاولوا إنشاء مربع له مساحة دائرة معينة ، كما بحث في تدوير المربع ، وقد أدى به ذلك إلى البحث في علاقة الدائرة بالأشكال المضلعة المرسوم داخلها وخارجها كما بحث في مسألة تضعيف المكعب أعني حاول ايجاد طول ضلع مكعب ، حجمه ضعف حجم مكعب معلوم ، وبالتالي حاول أن يحل المعادلة $ك^{٣} = ٢$ المعبرة عن هذه المسألة عندما يكون طول ضلع المكعب هو الوحدة بأن ردها إلى المعادلة $ك^{٣} = أ ب^{٢}$ حيث استبدل بالمكعب الأصلي متوازي سطوح قائم مربع القاعدة .

ثم لاحظ أن الحل يكون ممكناً إذا أدخلنا متوسطين نسبيين ل ، س بين أ ، ب فتتحول المسألة إلى $\frac{أ}{ل} = \frac{ل}{س} = \frac{س}{ب}$ ، ولقد توصل مينخموس Menechme إلى حل مسألة أبقراط من المتوسطات المتناسبة ببحثه في تقاطع المخروطات وتقاطع المنحنيات . وما يهمنا هنا هو أن أبقراط حاول حل مسألة تضعيف المكعب بأن رد المكعب إلى شكل آخر هو متوازي السطوح القائم المربع القاعدة ، ثم رد المطلوب عندئذ وهو ايجاد الجذر التكعيبي للطرف الأيسر من المعادلة الناتجة إلى ايجاد حل مسألة نسبة وتناسب بتحديد متوسطين نسبيين وهذا التفكير أدى ، كما يقول برانشفيك ، إلى استخدام منهجي للتحليل لا من أجل اكتشاف الحقائق الرياضية ، بل من أجل اكتشاف قضايا تسمح بتحقيق المقدمات الكبرى .

ثم اجتذبت أثينا بتفوقها في الأمور العقلية العلماء والفلاسفة وكان من أشهرهم أفلاطون (٤٣٠ ـ ٣٤٧ ق . م) الذي يعتبره البعض

صانع الرياضيين دون أن يكون هو نفسه رياضياً بالمعنى المعروف للكلمة ولقد اكتملت على يد أفلاطون في القرن الرابع العملية الجدلية والمنطقية وهي الأداة الرئيسية للرياضي . وقدم لنا أفلاطون من محاوراته نماذج بلغت الذروة في الاستدلال العقلي الذي يسير وفق المنهج العلمي . وكان لديه نفس ما لدينا من أفكار عن المنهج وعن العقلية الهندسية . وقد كتب على باب مدرسته « لا يدخل هنا إلا من كان مهندساً » لأنه يرى أن العلوم المضبوطة لها أثر كبير على التقدم العقلي ، وأنها مدخل مناسب للفلسفة ، ولذلك اهتم بالرياضيات ومنهجها اهتماماً كبيراً .

لقد اهتم أفلاطون بالاستدلال ودقته اهتماماً بالغاً ، وأراد أن يكون منهج الرياضيات منهجاً صورياً بعيداً عن المزاولة العملية يقوم على الاستدلال غير التجريبي . فالعلوم الرياضية مع أنها تبدأ من المحسوسات وتستعين إلا أن لها موضوعات متمايزة عن المحسوسات ، ولها مناهج خاصة ، فليست الهندسة مثلاً مسح الأرض ، ولكنها النظر في الأشكال أنفسها ، فالعلوم الرياضية تضع أمام الفكر صوراً كلية ونسباً وقوانين تتكرر في الجزئيات ، لذا يستخدم الفكر الصور المحسوسة في هذه الدرجة من المعرفة لا كموضوع بل كواسطة لتنبيه المعاني الكلية المقابلة لها ، ثم يستغنى عن كل الصور الحسية ويتأمل المعاني الخاصة ، ثم يستغنى عن التجربة في استدلاله ويستخدم المنهج الفرض الذي يضع المقدمات وضعاً ويستخرج النتائج .

ولذلك قدر أفلاطون الفيثاغوريين لأنهم صعدوا إلى المبادىء

العليا ودرسوا المسائل بطريقة مجردة وبالعقـل الخالص ، ومن ثم كانوا مبتكري الرياضيات البحتة . وأعني الهندسة .

لقد أراد اليونانيون بعامة أن يبرهنوا على أفكار بحتة وجواهر مثالية دون أن ينحدروا إلى اعتبار الأشياء المحسوسة ولذلك كَوَّنوا علماً رياضياً على عكس المصريين الذي انحدروا إلى المادة والدواعي العملية . فاليونانيون لم يروا في التعبيرات العددية والأشكال الهندسية ـ باعتبارها موضوعات علم دقيق ، وعقلي صرف ـ إلا صورة خارجية وعرضية . وعندما نحلل هذه الأشكال والتعبيرات ، فإن استدلالاتنا لا تنصب في الواقع عليها ، ولكن على الأفكار المثالية الدائمة . وهذا بالضبط ما ذهب إليه أفلاطون . لا يستطيع أحد من هؤلاء الذين يمكن أن نعتبرهم ناقلين للهندسة في القرن الخامس أن يعارضنا في أن هدف هذا العلم ليست له مطلقاً أية علاقة مع اللغة التي يتكلمها هؤلاء الذين يعالجونها . . فهم يتكلمون عن التربيع والمد والإضافة إلى آخر ما هنالك ، وكأنهم يعملون في الواقع ، وكأن كل براهينهم تميل إلى العمل ، في حين أن هذا العلم ليس له بالمرة موضوع آخر سوى المعرفة لما هو موجود دائماً ، لا لما هو يولد ويهلك وعلى ذلك تجذب النفس نحو الحقيقة ، وتكون فيها العقلية الفلسفية .

فالهندسيون يستخدمون أشكالاً مرئية ، ويعملون منها موضـوعاً لاستـدلالاتهم ولكن الموضـوع الحقيقي لتفكيرهم ليس هـو هـذه الأشكال . أنه وقائع أخرى ، تشابه هذه الأشكال . فبراهينهم تقوم على المربع في ذاته ، وعلى القطر في ذاته ، وليس على المربع أو

القطر الذي يرسمونه . فهذه الأشكـال ليست إلا صوراً يلجـأ إليها الهندسيون . لكي يصلوا إلى وقائع لا يمكنهم إدراكها إلا بالفكر .

فالناحية الأولى لتأثير أفلاطون على الهندسة وتقدمها هي إصراره على قيـام الـريـاضيـات على الأشكـال المثـاليــة المختلفـة عن المحسوسات .

أما الناحية الثانية فهي اهتمامه بالتحليل . لقد تقدم أفلاطون على العصور القديمة واستبقها بما اكتشف من بداية لمنهج كُلي عام . وهـذا المنهج يمتـاز بمرحلتين : مـرحلة تراجـع ومرحلة تقدُّم ، وكـلاهما ضـروري في منهج أفـلاطون الـذي نجـد فيـه التحليـل التراجعي يظهر خلال الخطوات المنهجية لنظرية المعرفة تقدم النشاط العقلي ، ذلك لأن كلاً من التحليل والتركيب يسير في عكس اتجاه الآخر وبذلك يتميزان عند أفلاطون ، إذ ميز أفلاطون فيما يذكر أرسـطو ـ المنهج الـذي يبدأ من المبـادىء والمنهـج الـذي ينتهي إليها . وكان يسـأل نفسه أي المبـدأين مناسب في بحث مـوضوع معين ، ولكن أرسطو يرى لإعضاء الليسيه أن يبدأوا مما هو معروف ، وأن يعتبروه كوقائع وحقائق دون أن يحاولوا رده إلى ما هـو بمثابـة مبادىء له . ومعنى ذلك أن أرسطو قد أخذ بالمنهج التركيبي ، ولا يرى ضرورة للمنهج التحليل الذي رأى أفلاطون أهمية استخدامه . وقد قيل ، فيما نقله بروقلس وديوجانس اللايرسي Diogenelarce لنا ، أن أفلاطون هو الذي أدخل في الهندسة المنهج التحليلي الذي ينتقل من القضية محل البحث إلى مبدأ سبق قبوله ولا يوافق بول تانيري على ذلك ، لأن التحليل في صورته الابتكارية لم يكتشف في عصر أفلاطون؛ ، فهو متضمن في تخبطات المهندسين الأوائل

الذين قاموا بتنظيم ملاحظاتهم ، وقد استخدمه كما سبق أن رأينا ، أبقراط في محاولة حل مسألة تضعيف المكعب . وعلى ذلك يكون بـروقلس قد قصـد ، عندمـا تكلم عن المنهج الأفـلاطـوني ، أنـه استخـدم التحليل . ولم يبـدأ هذا المنهـج عند أفـلاطـون ، لقـد اكتمل ، فيما يقول برانشفيك في الأجيال التي بعثت فيثاغورت ، وتحت تأثير فيثاغورت نفسه . علم يسمح لنا أن نرجع كل الاستدلالات الرياضية إلى صورة دقيقة ، ولزم عن ذلك العلم بالضرورة ، كنتيجة له ، القيام باستخراج المناهج من البراهين . وهذا العمل هو الذي أدى بأفلاطون إلى جعل التحليل ، كعملية للبرهنة ، ينتقل من القضية المذكورة إلى المبادىء الأولية التي تسبب اليقين وهذا اعتبار أظهر أهميته مؤرخو الرياضيات اليونانية . ومن الجدير بالملاحظة أن هذا التحليل ، على خلاف تحليل المحدثين لا يكفي بذاته ، لأن القدماء لم يعتلوا خشبة الجبر ، حيث تصاغ القضايا بعامة من معادلات تكون فيها القضايا قابلة للانعكاس ، ولكنهم انحصروا في ميدان الهندسة ، حيث تكون القضايا منظمة عادة في تسلسل لا يعكس فالتقدير : أن كون ب صادقة يتضمن أن أ صادقة لا يبرهن على أن صدق أ يتضمن صدق ب .

ولكن تحليل القدماء قد اعتبر موصلاً إلى برهان تركيبي ولا يمكن أن نشكك في ذلك، بأن نستنتج مع بول تاينري أن هذه الرابطة الضرورية بين التحليل والتركيب ليست موجودة في تصور أفلاطون للتحليل . فإذا كان التراجع يبدأ من ملاحظة المحسوس ويؤدي إلى الفروض الأساسية للرياضيات فإن العلم يبدأ في تكوينه النهائي من هذه الفروض ويتجه نحو النتائج .

أن أفلاطون لا يربط فقط بين تحليل الرياضيين والاستنباط التقدمي الذي يمهد له ، بل يشير علينا بأن نقوم بمجهود جديد للتحليل يصعد من الفروض إلى المبادىء المطلقة التي تعتبر أساساً لها وهذا ما يسمى بالجدل التركيبي في مقابل الجدل التحليلي . أن الرياضيين في نظر أفلاطون يتخذون نقطة بداية استدلالاتهم فروضاً ليست صالحة لتبرير ذاتها أو غيرها وطالما لا يمكننا أن نسمو على هذه القضايا فلا تستحق الرياضيات اسم العلم . إنها أدنى من العلم لأنها استدلالية لا تكفي نفسها ، لأنها تضع مبادئها وضعاً ولا تبرهن عليها باستخراجها من مبادىء عليا ويستحيل أن يقوم علم كامل حيث يكون هناك مبادىء يقينية . أن العمومية التي تخص البراهين والاستدلالات الرياضية تتضمن عمومية المبادىء التي تعتمد عليها هذه الاستدلالات . ولذلك يجب أن نبرر هذه المبادىء بنظرة مباشرة للأجناس العليا للوجود .

فأفلاطون يرى أن الموضوعات الحقة للتأملات الحسابية والهندسية ، هي مثل الأعداد الصحيحة ومثل الأشكال الهندسية فالحساب كالهندسة يسمو بالروح ، ويجبرها على الاستدلال على أعداد في أنفسها دون أن تتكبد أن تجري حساباتها على أعداد مرئية أو محسوسة ، وعلى ذلك فإن العلم الرياضي له دور أساسي هو أن يسهل على الروح الطريق الذي يجب أن تتبعه لتأمل الحقيقة .

فالمثلثات التي يبرهن عليها الهندسيون ليست أبداً هذه التي تدركها حواسنا فليس هناك في الواقع مثلث مادي ويكون في الآن

عينه دقيقاً . أعني مستوياً تماماً ، وأضلاعه مستقيمة وليس له سمك ، فعندما نستعين بصورة فيزيقية لمثلث . لنبرهن على خاصية له يجب علينا أن لا نرى في هذه الصورة إلا تنفيذاً إضافياً وطريقة للتعبير . فالمثلث الذي نريد أن نتكلم عنه هو المثلث الموجود في فكرنا ، وليس ذلك المرسوم على الورق أو على السبورة ، أو على الرمل . فإذا لم يكن في إمكاننا تصور الأفكار الهندسية في صورة محسوسة فكيف يمكننا أن نصل إلى جعلها موضوعية وأن نضعها بطريقة ما أمام أعيننا وأمام فكرنا ، لكي نـدرس الفهم الخالص ، ولكي نكتشف الخصائص . أننا ننتقل من المحسوس إلى المفروض ومن المفروض إلى المثل .

أما الناحية الثالثة التي أثر بها على الرياضيات ومنهجها فهي اهتمامه بالانشاء العقلي . إن الهندسة تخالط كما رأينا المحسوسات ، ولذلك يجب علينا لكي نقيم الهندسة على أسس متينة ، أن نجد معياراً دقيقاً يسمح بتمييز الأفكار التي تدخل في هذا العلم . وهذا المعيار هو نظرية الإنشاء ، وهي عملية مختلفة عن الانشاء المحسوس الذي مارسه مساحو الشرق ، الشرق القديم ، إذ هو عملية عقلية تسمح بتحقيق الوجود النظري للأشكال التي نستدل عليها ، ولكي نصل إلى هذا الهدف فإن أسهل طريقة هي الانشاء العقلي للشكل باستخدام المسطرة والبرجل . فإذا حددنا الطريقة التي من الممكن أن ننشيء بها هذا الشكل برسم سلسلة من المستقيمات والدوائر بمعرفة نقطتين أو نقطة ومركز نكون قد برهنا على وجود الشكل .

ويذكر بلوتارك Plutaique أن أفلاطون عبر عن تطور الانشاء وقد أسف لاستخدام مدرسة ايدوكسوس Eudoxe لآلات ووسائل ميكانيكية في حل المسائل غير المسطرة والبرجل ويقول ساجيريه أنه خشى أن يكون في استخدام الآلة الميكانيكية إغراء إلى التصرف بالتجربة وأهمال البرهنة بالاستدلال العقلي .

ومن الجدير بالملاحظة أن الانشاءات لا تصلح إلا للهندسة المستوية ، ولذلك وجدت ضرورة للاسقاطات في الهندسة الوصفية .

أما الناحية الرابعة لتأثير أفلاطون فهي تناوله ـ مواضع كثيرة من محاوراته ـ لموضوعات رياضية تخص الهندسة وتلقي ضوءاً على منهجها ، وتبين اعتمـاده على الحدس وبالأخص العقلي الذي أكد أفلاطون دوره في الوصول إلى الحقائق الرياضية فلكي نكتشف الأفكار علينا أن ننظر بفكرنا فإذا أخطأنا ، فما ذلك إلا لأننا لم نستخدم أن نصل إلى كشف الأفكار وحل المسائل إذا أمعنا التفكير . وكان أفلاطون بشبه البحث عن الأفكار بالصيد . وهذا يصدق بالأخص على البحث الرياضي ، وهذه المقارنة مضبوطة تماماً .

ويدل تفسير أفلاطون لنشأة الكون في محاورة تيمـاوس على أنه يبدأ من الأمور البسيطة كالمثلثات التي تحدس على نحو مباشرة لينتهي إلى الأمور المعقدة والمركبة كالمجسمات والمكعب ومتوازي المستطيلات . وقد ناصر أفلاطون الحدس ، وألح في ذكر الأسباب التي تمنعنـا من انشاء العلم بطريقة التركيب المنطقي الذي يفترض أن الفرد يستطيع أن يحلل كل الأفكار الرياضية إلى عناصرها الأولية ،

وذلك لأن كل فكرة من الأفكار الرياضية الأكثر أهمية ليست مجموعة لأجزاء وإنما هي كل غير منقسم ولا يقبل التعريف ، ولا شيء أكثر معرفة منه ، ففكرة المثلث مثلاً هي فكرة غير مركبة وهي كالخط المستقيم غير قابلة للتحليل في انكشافها لفكرنا بحدس مباشر . وإن كان أفلاطون حاول أن يبتعد عن الحدس المحسوس الذي اعتمد عليه الفيثاغوريون مؤكداً أن الرياضيات تبدأ من فروض واتفاقات بعيدة عن التجربة والمحسوسات وذلك حين اعتبر النقطة اتفاقاً هندسياً وسماها بمبدأ الخط .

أما الناحية الخامسة استخدام أفلاطون على نطاق واسع في محاوراته لما يسمى ببرهان الخلف سواء كان رداً إلى غير المقبول أو رداً إلى المحال ، ولقد كان أحد الأوائل الذي منهجوا قواعد البرهان الدقيق ، وبين لنا أن العلم يجب أن يعتمد على تحليل وتركيب . كما أنه يؤكد في عبارات صريحة من الجمهورية أن العلم الرياضي يجب أن يعرض في صورة سلسلة غير منفصلة من القضايا(١٠٠) ويقول بروقلس أن اقليدس كان أفلاطونياً في رأيه وقد وضع كهدف نهائي في أصوله انشاء الأشكال الأفلاطونية (١٠١) . كما أنه أخذ بالجدل الأفلاطوني في أصوله وبتحليله التراجعي .

وقد أصبح منهج التحليل التراجعي الذي قدمه أفلاطون وفي مجال التفكير التأملي المقياس المباشر للتقدم العلمي ، كما أصبح منهجاً مستقلاً يوافق طبيعة الفكر ، الذي وظيفته تحليل النسيج المتشابك للنظريات ، فيصل إلى اكتشاف العلاقات الرياضية وقد قدر بهذا المنهج أن يظهر عقب قيام النهضة عند جاليلو وديكارت ونيوتن ، وأن يؤدي إلى الحضارة الحديثة .

وفي أوائل القرن الرابع قبل الميلاد ظهر ايدوكسـوس Ebozedecnide (٤٠٨ ـ ٣٥٥ ق . م) الذي درس الرياضيات على يد رياضي من الدرجة الأولى هو ارختياس Archytas (٤٢٨ ـ ٣٣٧ ق. م) كما درس المنهج على يد أفلاطون كان ايدوكسوس فيما نعلم ، أول من ابتكر طريقة مقنعة منطقياً ، طريقة قدمها اقليدس في الكتاب الخامس من مؤلفه الأصول ، وتناولها مرة أخرى ارشميدس (٢٨٧ ـ ٢١٢ ق . م) للسيطرة على مشاكل الاتصال والغاز اللامتناهي ومتاهات الأعداد الصماء ، التي تظهر بالأخص عندما نريد أن نوجد مساحة السطوح التي تحدها منحنيات ، أو المنحنية أو عندما نريد أن نوجد حجم جسم تحده سطوح منحنية . ولقد حاول ايدوكسوس بنظريته في النسب أن يجعل الاتصال الهندسي ينطبق على كل علاقة للمقدار سواء كان قابلاً للقياس أو غير قابل له . وحاول بهذه النظرية أن يتغلب على الشكوك التي أثارها زينون حول الاستدلال الرياضي والتي اهتم بها أفلاطون وأرسطو . ويقال أن ايدوكسوس بنظريته في النسب قد استطاع أن يخمد هذه المشكلة حتى الربع الأخير من القرن التاسع عشر . وقد مكن تعريف ايدوكسوس العصري لتساوي النسب الرياضيين من أن يعالجوا الأعداد الصماء بدقة معالجتهم للأعداد المنطقة . مما كان نقطة بداية لنظرية حديثة في الأعداد الصماء ، وبعد ذلك وضع أسس منهج للانهايات الذي يسمح بأن تنتقل من شكل منتظم إلى شكل مرسوم داخله أو خارجه وهذا المنهج يسمى بمنهج الاستنفاد Quise-ment exhaustion لقد أراد ايدوكسوس بطريقته بالاستنفاد ، التي تستخدم في تقدير المساحات والحجوم . أن يبين أننا لسنا في حاجة

إلى أن نفرض وجود الكميات الصغيرة للغاية ، فإنه يكفي لأغراض الرياضيات أن نكون قادرين على الوصول إلى مقدار صغير الصغر الذي نرغبه بالقسمة المستمرة لمقدار معين فطريقة الاستنفاد إذن هي تطبيق مدهش لحجة القسمة الثنائية التي قدمها زينون وتقوم هذه الطريقة على اللالتجاء إلى فكرة اللانهائي وعلى تقريبنا لأحد المقدارين غير المتساويين من الآخر بواسطة استنفاد الفرق بينهما . وقد استطاع ايدوكسوس أن يحسب محيط الدائرة وفي نصف قطر ، وقد برهن هو وآخرون بالاعتماد على هذه المبادىء أن الدوائر لها مساحات متناسبة مع مربعات أقطارها .

وقد ظهر منهج الاستنفاد من جديد عند ارشميدس الذي تناوله أو ابتكره للمرة الثانية واستخلص منه تطبيقات موفقة وخصبة . وتعتمد عملية الاستنفاذ على برهان الخلف أو الرد على المحال الذي تأكدت دقته المطلقة نفسها هي التي منعت الهندسيين الاغريق من محاولة القيام بحل المسألة التي أقترحتها المساحات والحجوم المنحنية الخطوط ،على نحو أخر . ولقد أكتشفت أرشيميدس بلمحة من عبقريته عملية التكامل التي تعتمد على دراسة مقارنه للحظات الاستاتيكية لشكلين مما سمح بايجاد معادلة الاتزان بين سطح وحجم معروفين لشكل آخر ، ولم يكن أرشميدس يقتنع بالنتائج إذا لم تؤكدها عملية الاستنفاد . فاستدلال الاستنفاد كان في نظر الهندسيين الأغريق استدلالاً يسمح وحده بدحض جدل زينون دحضاً موفقاً وقد تجنب المرء به الاستخدام المباشر اللامتناهي الذي نتج عن القسمة الثنائية التي انتقدها زينون .

ومع ذلك كان منهج الاستنفاد محتاجاً إلى تعميم كي يستخدم في جميع الحالات ، وذلك بأن نفحص ، كما فعل كاناليري Canalieri وفيرما Fermat وباسكال فيما بعد ، المتواليات الهندسية ، التي تعبر عن تحليل أو تفكيك الشكل الهندسي في ذاتها ، وكان ينبغي أن نبرهن على الشروط التي تحققها هذه المتواليات الهندسية كي تستخدم في كل مسألة أياً كانت ، وكان من الممكن بالسير في هذا الاتجاه أن يكتشف الهندسيون الاغريق حيلة متشابهة للحيلة التي استخدمها نيوتن وليبنتز ، وأن يحققوا لمنهجهم تعميماً ملكوا عناصره الجوهرية ، ولكنهم أرادوا قبل كل شيء أن يتجنبوا الاستخدام المباشر اللامتناهي فاكتفوا بتأكيد دقة منهج الاستنفاد في كل حالة جزئية لدرجة أنه لم يبق محل لأن يمتدوا بالمناهج التي يستخدمونها في البرهان على نتائجهم إلى أبعد من الحاجة اللحظية ، ولا لأن يبتكروا مناهج جديدة . ولم يتابع تلاميذ أرشميدس عمل أستاذهم العبقري على الرغم من المعارف التي كانوا يملكونها لأن اليونانيين أعجبوا بمنهج اقليدس لوضوحه وسهولة تناوله أكثر من إعجابهم وتمسكهم بمنهج ايدوكسوس وارشميدس ، ولو فعلوا العكس لسارت الرياضيات في طريق جديد ولما كان نيوتن وليبنتز ، مبتكرين لحساب التفاضل والتكامل .

نخلص من دراسة الرياضيات ومنهجها قبل اقليدس إلى أن الرياضيات قد تبلورت في هذه الفترة بفضل فيثاغورث ومدرسته ، وأنها ظهرت في صورة علم حق ، له منهجه وأن المنهج الرياضي الذي مارسه فيثاغورث ومدرسته قد أخذ يتطور ويتقدم عند الأجيال التي

تلته ، ويظن أنه اكتمل عند أبقراط مؤلف أقدم أصول هندسية ، وأن أفلاطون صانع الرياضيين قد تناول المنهج بالتحليل مبيناً مراحل وشروط يقينية ، وأن ايدوكسوس طبق هذا المنهج الذي تعلمه من أفلاطون في كل ما تناوله من رياضيات وأنه أضاف إلى المنهج حيلة جديدة ، كانت لها أكبر الأثر في الرياضيين من بعده ، وقد ازدهرت الهندسة على يد هؤلاء المفكرين العظام . وقامت عدة مدارس رياضية تدرس فيها الرياضيات مستقلة عن الفلسفة وقد ألفت عدة مؤلفات رياضية . وكل ذلك كان بمثابة تمهيد وإعداد لعصر ذهبي للرياضيات فجره اقليدس .

٢ ـ المنهج الرياضي عند اقليدس :

كان اقليدس (٣٣٠ ـ ٢٧٠ ق . م) أحد علماء مدرسة الإسكندرية الأوائل ، الذين قاموا بأبحاث قيمة بالأخص في الرياضيات ومن أهم كتب اقليدس « كتاب الأصول » الذي يضم مجموعة كبيرة من النظريات التي لم تكن من ابتكاره ، أنه بمثابة ملخص للمعلومات الهندسية التي وصل إليها اليونان منذ فيثاغورث حتى اقليدس ، الذي جمع كل ما هو جوهري من رياضيات عصره ونسقه وبوبه في تسلسل منطقي .

ويقفز «كتاب الأصول» إلى جانب «أورجانون أرسطو»، فيصارعه في الأهمية والدقة والصورة البرهانية . فكلاهما قد عرض بدقة كاملةٍ لا يمكن أن تنتقد ، وقد وصلا إلى درجة من الكمال ما كان يظن أن أحداً يمكنه أن يتعداها وكلاهما انتهلت منه الأجيال

المتعاقبة ، وكلاهما أثر على الفكر سواء بالأخذ أو النقد ولقد استخدم الشكل الاستدلالي لكتاب الأصول استخداماً يماثل استخدام منطق أرسطو . ويقول ليبنتز عن هذا الاستدلال « ليست الأشكال هي التي تقدم البرهان عند الهندسيين ، بل دقة الاستدلال مستقلة عن الصورة المرسومة» التي وظيفتها أن تسهل فهم ما يراد قوله ، وأن تركز الانتباه ، فالقضايا العامة أو التعريفات والبديهيات والنظريات التي سبق البرهان عليها هي التي كونت الاستدلال ، وهي التي تملكه حين لا يكون هناك شكل . فدقة براهين اقليدس ترجع إلى اعتمادها على هذه المبادىء المسلم بصدقها . وهذه البراهين الدقيقة ليست مقصورة على الهندسة وحدها فقد قدم إلينا أرسطو من تحليلاته الأولى أمثلة على البرهنة، تؤكد أن المنطق قابل لبراهين تضارع براهين الهندسة ، ومن الممكن القول أن اقليدس استفاد منطق هندسته أو طريقة برهنته من منطق أرسطو ، ولكن هذه النظرية التي يبدو فيها المنطق الاقليدي وكأنه حالة خاصة من المنطق قد قومتها معرفة تطور الفكر اليوناني ، فعلى الرغم من أن كتاب الأصول قد ألف بعد زمن أرسطو بكثير ، إلا أنه ينتسب إلى الأجيال التي سبقت أرسطو ، ليس فقط في العمل المنهجي للتسلسل والبرهان الذي ظهر في مدرسة فيثاغورث وفي مدرستي أفلاطـون وأيدوكسوس . فعندما نستخلص من كتابات أرسطو كل التلميحات والعبارات التي تشير إلى مصطلحات الرياضيين التي عرضوها في تصوراتهم المنهجية للبديهيات والتعريفات ، تظهر لنا نظرية العلم الذي ينسبه له الشكل الإقليدي، فقد بلغ في ذلك العصر من النضج ما يكفي لأن يلهم فكرة تركيب منطقي . وقد سبق أن ذكرت

ان أبقراط كان أول من نشر محاوراته التي بث فيه آراءه الهندسية . وقد كان يعاصره ايدوكسوس صاحب نظرية النسب وطريقة الاستنفاد وليوداماس leodamas وأرخيتاس وتيتاتوس الأثيني . وقد كتب أحد تلامذة ليوداماس أصولاً ، كما ألف تيدياس Theudius أصولاً ممتازة ويصف بروقلس المحاولات التي بذلت قبل اقليدس لبناء هندسة عقلية بقوله « من الصعب في كل علم أن تختار وأن تضع العناصر التي يخرج منها ويعود إليها كل ما عداها، وقلّل بعضهم الآخر هذا العدد ، وحاول البعض استخدام البراهين المختصرة ، وأسهب بعضهم الآخر في عرضهم اسهاباً كبيراً ، وتجنب بعضهم الرد للمستحيل» . وتجذب هؤلاء النسب يرفضون المبادىء. وباختصار ابتكر مؤلفو الأصول المختلفة عدداً من الانساق المتباينة ويحدد بروقلس ما كانت تسعى إليه كتب الأصول للطالب ، وأن نجمع ما ينسجم معاً ويضم الموضوع .

وهذا شيء ضروري للعلم وأن نتجه أساساً وفي الوقت نفسه إلى الوضوح وإلى التحديد لأن ضديهما يضايقان العقل ، وأن نحاول أن نضفي على النظريات الصورة الأكثر عمومية لأن تفصيل التعليم في الحالات الجزئية يجعل تحصيل المعرفة أشد صعوبة .

ويصف بروقلس ما امتاز به كتاب الأصول الاقليدي عن غيره بقوله «سوف نجد، وفقاً لوجهات النظر هذه الكتاب الابتدائي لاقليدس يتفوق على جميع ما عداه ، فإذا نظرنا إلى فائدته فإنه يؤدي إلى نظرية الأشكال الأبدية » وقد تأكد فيه الوضوح والتسلسل المنتظم وذلك بالسير من الأكثر بساطة إلى الأكثر تركيباً ، وبوضوح أساس

لنظرية الأفكار العامة ، وبعمومية البراهين ، وباختيار نقطة بداية للمسائل المراد علاجها في النظريات التي تقدم المبادىء .

فالمنطق الأرسطي والهندسة الاقليدية قد ظهرا على التوالي دون أن تكون الهندسة قد ظهرت في وقته متأخرة ، بالضرورة على المنطق ودون أن يكون المنطق سابقاً بالضرورة على الهندسة ، فكلا الاثنين قد انبثق من جنس واحد ، ومن روح واحد وعقل واحد ، وكلاهما قد حقق الانسجام الذي كان ينشده اليونان لأنه يعبر عن الحقيقة الأزلية .

علينا أن نفحص هيكل الاستدلال الهندسي الذي اتبعه اقليدس في كتابه الأصول الذي عرض فيه أجزاء هامة من الحساب ومن الهندسة بالأخص في صورة منطقية تقوم على عدد من الفروض .

إن اقليدس لم يكن كما قلنا ، مبتكراً لجميع ما حواه كتابه ، فقد أخذ من سابقيه أخذاً كبيراً ، ولكن له فضل لا يمكن انكاره ، حيث أنه طور الأعمال الهندسية التي انجزت قبله . وربطها بمنطق لا يزعزع . وبذلك أوضح الطابع العقلي الضروري للهندسة . وقد برهن على أنه عندما نضع بعض المبادىء نتابع سلسلة من القضايا الرياضية بطريقة لا تقاوم .

إن كتاب الأصول يعرض في الواقع نموذجاً لعلم حق ، يبدأ بمجموعة من القضايا الأولية ، يعبر عنها على نحو من الممكن أن يقبله الجميع ، ومع أن هذه القضايا قليلة العدد ما أمكن إلا أنها قادرة على ضمان تشييد البناء الرياضي كله . وهذا التشييد يذهب من البسيط إلى المركب بواسطة البرهان . فهو يبدأ بإثبات خصائص

للأشكال الأولية ثم يبرهن بواسطتها على خصائص الأشكال الأكثر تعقيداً ، وفي ذلك تركيب هندسي . وهذا عمل يجب ألا يهاجم من الناحية المنطقية، فاقليدس، إذن، ينهج ـ كما يقول ـ زيتن في كتابه نهجاً تركيبياً يذهب من البسيط إلى المركب ، أعني يذهب من الأشكال الأكثر بداهة وأولية كي ينتهي إلى الأشكال الأكثر تعقيداً .

ولكن المنهج الرياضي في الفترة المعاصرة على خلاف ذلك فالتحليل الحديث يتبع سيراً مختلفاً ، فهو يبدأ بوضع معادلات عامة يصل منها ، بإضافة قيود معينة ، إلى الحالات الخاصة . فإذا أردنا أن ندرس منحنياً كأهليلج مثلاً كان علينا أن نبدأ بمعادلة المخروط التي نصل منها بتحديدات خاصة إلى الدائرة والأهليلج والقطع الزائد .

والمبدأ الذي يجدد البناء هو ألا تقبل حقيقة دون البرهنة وذلك باستثناء عدد قليل من المعطيات الأولية التي توضح قبلاً دفعة واحدة في بداية الهندسة ، وتستخدم في بناء العلم كله ، والمعطيات الأولى هي من ناحية التعريفات التي تقدم لنا التصورات الهندسية الأساسية ، ومن ناحية أخرى الفروض التي تتميز إلى مطالب أو مسلمات وإلى بديهيات أو أفكار عامة ، والمسلمات تؤكد قبلاً أن بعض التركيبات ممكنة والبديهيات تؤكد أن بعض الصفات الأساسية تخص المقادير والأشكال الأكثر بساطة . وتتسلسل النظريات ابتداء من هذه المعطيات الأولية ، ويعتمد برهان كل نظرية على ما يسبقها من نظريات اعتماداً جوهرياً .

ويجب على الباحث الذي يريد أن يوضح هيكل البناء الهندسي عند اقليدس أن يقوم بدراسة التعريفات والبديهيات والمسلمات

والنظريات ، كما هي معروضة في كتاب الأصول ، وعليه أن يوضح خصائص كل منها ودورة في البرهان الهندسي .

ويلاحظ أن اقليدس قد ذكر معظم تعريفاته وفروضه في بداية الجزء الأول من كتابه ، ألا أنه يبدأ كل جزء بذكر بعض التعريفات التي تلزمه لكي يتقدم في بناء هيكل هندسته وهذه التعريفات تحدد معنى التصورات المستخدمة وكيفية استخدامها . كما أنه في الجزء الخامس يذكر بعض البديهيات إلى جانب بعض التعريفات . أما الجزء الأول فيضم إلى جانب التعريفات الكثيرة خمس مسلمات وخمس بديهيات ضرورية لكي يقوم بتشبيه منطقي لكل البناء . ويجب أن نلاحظ أن هذا الاهتمام بالتمييز بين القضايا الأولية حسب طبيعتها كان نتيجة أبحاث الأفلاطونيين .

كما أن هذا النظام الذي اتبعه اقليدس كان عرضه لنقد الأتينيين في كثير من الأحوال ، وإن كانت الأبحاث الحديثة قد بينت مشروعيته .

والآن أتناول هذه المعطيات الأولية الاقليدية باختصار حيث ستتاح لي فرصة أخرى للكلام عن أسس المنهج الرياضي بعامة في هذا الفصل .

(أ) التعريفات الاقليدية :

يبدأ اقليدس كتاب الأصول بسلسلة من التعريفات باعتبارها مبادىء ، وإذا اعتبرت التعريفات مبادىء ، فليس ذلك بالمعنى الدقيق لكلمة مبادىء . فهي لا تعبر عن جواهر الأشياء أو ماهياتها أنها تعريفات أسمية ، وليست واقعية وقد وضعت بغرض الوصول

إلى أقصى درجة من الوضوح اللغوي مقترنة بذلك من المعطيات الأولية للتجربة .

وعلى ذلك فتعريفات اقليدس لا تتضمن وجود الأشياء المعرَّفة وجوداً واقعياً فهو لا يعمل على أشياء جزئية ، بل على أفكار عامة ، استخلصها استقراءً من الجزئيات ثم قام بتركيبها . وهو في الحركتين صاعد وبذلك يكون في عكس اتجاه منطق أرسطو . وأن تمسك اقليدس بالتعريفات الاسمية يجعله على خلاف ميلي الذي رأى في العصر الحديث أن كل تعريف يتضمن بديهية تقرر وجود الشيء المعرف ، فاقليدس لا يحتم وجود ذلك الشيء .

وإليكم بعض تعريفات اقليدس :

١ ـ النقطة هي ما ليس له أجزاء ، أو هي ما ليس له مقدار .

٢ ـ الخط طول دون عرض .

٣ ـ نهاية الخط نقطتان .

٤ ـ الخط المستقيم هو الذي يقع باعتدال بين نقطتي النهاية .

٥ ـ السطح هو الذي له طول وعرض .

٦ ـ نهاية السطوح هي الخطوط .

٧ ـ الزاوية المنفرجة هي التي تكون أكبر من قائمة .

٨ ـ الزاوية الحادة هي التي تكون أقل من قائمة .

٩ ـ الأشكال الثلاثية الأضلاع أو المثلثات هي التي يجدها ثلاثة مستقيمات .

١٠ ـ المثلث المتساوي الساقين هو المثلث الذي له ضلعان متساويان .

١١ ـ المثلث حاد الزوايا هو الذي يحتوي على ثلاث زوايا حادة .

١٢ ـ المستقيمات المتوازية هي مستقيمات على سطح واحد بحيث لا تتقابل مهما من كلتا الجهتين .

ويجب أن نلاحظ على تعريفات اقليدس ما يلي :

أولاً : أنها لا تفي بجميع المطالب ، فتعريف الخط المستقيم غامض ولا يتضح إلا عندما نربطه بأصله التجريبي ، فالرجل العملي يتحقق من استواء السطح بواسطة مسطرة مدهونة بالزيت ، وكذلك الحال فيما يلاحظ سوريل G. Sorel بالنسبة لتعريف المتوازيين . فتعريف اقليدس لهما بتساوي البعد بينهما وعدم تقابلهما ليس إلا ترجمة هندسية لعادات الهندسيين الذين كانوا يستخدمون كتلاً متوازية الأضلاع في تشييد الممرات لضمان ثبات البعد بين جانبيهما وعدم تلاقيهما . . كما أن بعض التعريفات ، كتعريف قطر الدائرة مثلاً ، يتضمن عناصر غير مفيدة ، فلم يكن هناك داع في تعريفه لأن يذكر أنه يقسم الدائرة إلى قسمين مادام قد ذكر أنه يمر بالمركز .

ثانياً : أنها موضوعة في نسق بحيث يعتمد فهم أحدها على فهم ما يسبقه . إنها منظمة تبعاً للجنس والفصل مما يذكرنا بالتصنيف الأرسطي. ففي التعريف الثامن نجده يتكلم عن الزاوية المستوية كجنس ، وصل منه إلى الزاوية المستقيمة الضلعين ثم قسم هذا النوع الأعلى إلى أنواع هي القائمة والمنفرجة والحادة في التعريفات الثلاثة التالية . وفي تعريفه الرابع عشر تكلم عن الشكل كجنس . ثم قسم الأشكال إلى أنواع هي الدائرة والأشكال ثلاثية الجوانب والأشكال رباعية الجوانب والأشكال كثيرة الجوانب ، وذلك في

التعريفات التالية . وهو يتكلم عن المثلثات المتساوية الأضلاع والمتساوية الساقين ، والمختلفة الأضلاع ، والقائمة الزاوية ، والمنفرجة الزاوية ، والحادة الزاوية في تعريفاته من الرابع والعشرين إلى التاسع والشعرين كأنواع للأشكال ثلاثية الأضلاع أو المثلثات التي تكلم عنها في تعريفه الحادي والعشرين . وهو بعد أن يتكلم عن الأشكال الرباعية كجنس أو نوع أعلى في تعريفه الثاني والعشرين . يتكلم عن الأنواع التي تندرج تحت هذا الجنس ، وهي المربع وا لمستطيل والمعين ومتوازي الأضلاع وشبه المنحرف وذلك في التعريفات من الثلاثين إلى الرابع والثلاثين .

وبذلك نستطيع أن ننسب للأنواع ما ننسبه بصفة عامة للأجناس ، فما يصدق على الزاوية بصفة عامة يصدق على الزاوية القائمة أو المنفرجة أو الحادة .

ثالثاً : أن هذه التعريفات لا يمكن أن تنطبق على معطيات تجريبية واقعية كما هو الحال في منطق الفئات الذي لا بد من يتخذ اتجاهاً مضاداً للاتجاه الذي اتخذه التجريد ، فالتجريد يبدأ من الخاص ، أعني من المعطيات التجريبية الجْزئية وينتهي إلى العام ، أما منطق الفئات فهو يبدأ من العام لينتهي إلى الخاص . يبدأ من الأجناس لينتهي إلى الأنواع وإلى الأفراد في واقعهم الانتولوجي . فالمنطق يهبط دائماً . أما الهندسة فهي ترتفع ولكنها قد تهبط ، لأننا نجد فيها حركتين على صورة استنباط بما فيه من قياس ، وحركة أخرى صاعدة تخص موضوعات العلم نفسه . ونستطيع أن نقول أن اقليدس قد استخدم في هندسته التحليل كما استخدم التركيب .

(ب) المسلمات الاقليدية :

أما مسلمات اقليدس فهي قضايا تخص بعض التصورات التي سبق أن عرفت ، وتنسب لها صفات معينة لتجعلها مفيدة في إقامة النسق . وقد طلب منا إقليدس التسليم معه بالقضايا الآتية .

١ - من الممكن رسم مستقيم بين نقطتين .

٢ - من الممكن مد مستقيم محدود إلى أي طول .

٣ - من الممكن رسم دائرة من أي مركز ، وعلى أي بعد من هذا المركز .

ويلاحظ أن المسلّمتين الأوليين توضحان فكرة الخط المستقيم فالمسلمة الأولى تبين أنه محدود ومنته، لأنه محصور بين نقطتين، كما تبين إمكان البرهنة على تساوي مع مستقيم آخر إذا انطبقت نهايتاه ، على نهايتي ذلك المستقيم . وتبين المسلمة الثانية إمكان إضافة عناصر هندسية إلى عناصر أخرى . أما المسلمة الثالثة فهي تقرر تساوي أبعاد نقط المحيط عن المركز كما تقرر تساوي جميع أنصاف الأقطار الممكنة .

ويلاحظ أن إقليدس لم يذكر في أصوله إلا هذه المسلمات الثلاث غير أن بعض الرياضيين قد نقلوا ثلاث بديهيات إقليدية من ثبت بديهيات إقليدس وأضافوها إلى مسلماته اعتماداً على بعض المخطوطات وبعض التحريفات لكتاب الأصول وهذه المسلمات المنقولة هي :

٤ : المستقيمان لا يحددان مكاناً .

٥ : إذا قابل مستقيم مستقيمين، وكوّن معهما من ناحية واحدة زاويتين داخلتين مجموعهما أقل من قائمين ، فإن المستقيمين ، إذا

امتدا ، يتقاطعان في النهاية من الجهة التي يكون فيها مجموع الزاويتين أقل من قائمتين .

٦ : كل الزوايا القائمة متساوية .

وبعضهم يرى أن مسلمات إقليدس هي خمس فقط ، فتكون مسلمة تساوي الزوايا القائمة هي المسلمة الرابعة ومسلمة التوازي هي الخامسة .

وإني أرى أن هذا النقل مشروع ، فليست هذه المسلمات منسجمة مع باقي البديهيات .

كما يلاحظ أن مسلمات إقليدس هي قضايا أو فروض وضعها في مقدمة علمه ، وعلينا ألا نطالب بالبرهنة عليها وأن نسلم بها تسليماً إذا أردنا أن نتقدم في علمنا ، ذلك لأنها تقرر العناصر الضرورية للانشاءات الهندسية . وهي غير قابلة للبرهان ، فكل محاولة للبرهان عليها لا بد من أن تبوء بالفشل وهذا ما حدث بالنسبة لمسلمة إقليدس الخامسة الخاصة بالتوازي فقد حاول بعض الرياضيين أن يبرهنوا عليها ، وأن يستنتجوها من المسلمات الأخرى فلم يوفقوا إلى أن ذلك أدى إلى الكثير من الأبحاث التي كان لها تأثير هام في تطور الهندسة بخاصة والرياضيات بعامة مما سوف يأتي ذكره في الفصل الآتي :

(جـ) البديهيات الاقليدية :

والبديهيات الاقليدية هي قضايا نقبلها ، دون أن نطالب بالبرهنة عليها ، وذلك لشدة وضوحها ، فنحن نؤمن بصدقها لأننا ندرك مضمونها بالحدس .

وبديهيات اقليدس هي :

١ ـ الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها .

٢ ـ إذا أضفنا أشياء متساوية إلى أشياء متساوية فالنواتج الكلية تكون متساوية .

٣ ـ إذا طرحنا أشياء متساوية من أشياء متساوية فبواقي الطرح تكون متساوية .

٤ ـ إذا أضفنا أشياء متساوية إلى أشياء غير متساوية . فالنواتج الكلية تكون غير متساوية .

٥ ـ إذا طرحنا أشياء متساوية من أشياء غير متساوية فبواقي الطرح تكون غير متساوية .

٦ ـ إضعاف شيء واحد بعينه تكون متساوية (وبالتالي فإن إضعاف الأشياء المتساوية تكون متساوية) .

٧ ـ أنصاف الشيء الواحد بعينه متساوية . (وبالتالي فإن انصاف الأشياء المتساوية تكون متساوية) .

٨ ـ المقادير التي ينطبق أحدها على الآخر (أو التي تشغل نفس المكان) تكون متساوية .

٩ ـ الكل أكبر من جزئه .

هذا بالإضافة إلى البديهيات الثلاثة التي نقلت إلى قائمة المسلمات .

وبهذه البديهيات عرف اقليدس تساوي المقادير الهندسية وعدم تساويها .

فالبديهيات الأولى والثانية والثالثة والسادسة والسابعة والثامنة تتكلم عن التساوي .

وتتكلم البديهيات الرابعة والخامسة والتاسعة عن عدم التساوي .

ويلاحظ أن البديهية الأولى التي تتكلم عن تساوي الأشياء المساوية لشيء واحد بعينه من الممكن أن تسمى بمبدأ الاستدلال الرياضي ، ومن الممكن أن توضع على الصورة : إذا كانت أ = ب ، ب = جـ ، أ = جـ .

لقد وضع اقليدس إذن التعريفات والمسلمات والبديهيات أسساً لبنائه الهندسي وهذه الأسس يجب من وجهة نظر الاكسيوماتيك الحديث أن تتصف :

أولاً : أن تكون متوافقة ، أعني ألا تكون متناقضة بالضرورة فيما بينها . وإلا كانت النتائج ، التي تشتق منها بربط بعضها ببعض ، متناقضة بالضرورة .

وهذا الشرط حققه إقليدس في أصوله ، دون أن يبرهن عليه نظرياً .

ثانياً : أن تكون كاملة الصياغة وهذا لم يحققه اقليدس فعندما يقال أن الكل أكبر من الجزء ، كان من الواجب عليه أن يضيف إلى ذلك ، ما دمنا في مجال المقادير المنتهية ، لأن من المعروف أن الجزء في مجال الأعداد اللامتناهية يساوي الكل . فمجموعة سلسلة الأعداد الزوجية مثلاً تعادل مجموعة سلسلة الأعداد الطبيعية الصحيحة ، ما دمنا نستطيع أن نثبت تناظراً مشتركاً ومتبادلاً بين حدود هاتين المجموعتين .

ثالثاً : أن تكون كافية للبرهان على جميع قضايا النسق وهذا ما يسمى بشرط الاشباع ، وهذا الشرط لم يحققه إقليدس تحقيقاً تاماً فهو يهمل أن يبرر ببديهية وقائع يعتبرها واضحة مع أنها لا تصدر عن المباديء الأولية الموضوعة .

رابعاً : أن تكون الواحدة مستقلة عن الأخري ، فلا تقدم مسلمة أو بديهية من الممكن اشتقاقها من البديهيات أو المسلمات الأخرى . وهذا الشرط حققه إقليدس .

خامساً : أن تؤلف القضايا الأولية الضرورية لبناء الهندسة كلاً لا يمكن حله من وجهة النظر المنطقية ، أعني أن تكون مؤلفة على نحو لا يستطيع المرء أن يحذف منه أحد عناصره أو يغيره دون أن يؤدي ذلك إلى تحطيم البناء كله .

وإذا أدى الحذف أو التعبير لإحدى القضايا إلى نتائج غير مستحيلة منطقياً مع كونها مختلفة عما سبق أن قيل ، وجب أن تكون جميع انساق الهندسة التي نصل إليها بذلك مقبولة من وجهة النظر المنطقية ومتساوية جميعاً في الصدق . ولم يضع إقليدس هذه المسألة ، ولكنه أدرك أهميتها بطريقة غريزية عندما أعلن على صورة مسلمة أنه لا يمكن أن نرسم من نقطة خارج مستقيم إلا موازياً واحداً لهذا المستقيم . أن هذه المسلمة تتنافى مع الاعتقاد بوجود هندسة واحدة فقط ، فهذا الاعتقاد يجعلها نظرية محتاجة لأن نبرهن عليها . أما التمسك بها كمسلمة معناه الإيمان بإمكان وجود هندسات أخرى ، وبذلك يكون اقليدس قد راعى بإمكان وجود هندسات أخرى ، وبذلك يكون اقليدس قد راعى مطالب نسق البديهيات أو الاكسيوماتيك الحديث .

ومهما يكن من أمر هذه الأوليات فإنها كانت الأسس التي اعتقد إقليدس إمكان أن يقيم عليها نظرياته دون أن يلجأ إلى الحدس.

(د) القضايا الاقليدية المبرهن عليها مسائل ونظريات:

بعد أن عرض إقليدس في الجزء الأول من أصوله التعريفات والمسلمات والبديهيات، عرض ثماني وأربعين قضية مسلسلة ومبرهنة اعتمدت برهنة كل منها على القضايا التي سبق البرهنة عليها وعلى تعريفات ومسلمات وبديهيات الجزء الأول. والحق أنه عندما توضع هذه الأفكار الأولية يكون من الممكن أن تتسلسل ابتداء منها، وبواسطة الاستنباط المنطقي سلسلة من القضايا التي يصدر بعضها عن بعض.

وقد صنف إقليدس، في عرضه الاستنباطي، القضايا تبعاً لأهميتها وطبيعتها، فهناك النظرية Theoreme أو القضية الرئيسية، ثم القضية الثانوية lemme، وهي التي تسهل البرهان على نظرية آتية، ثم هناك النتيجة Corollaire أو القضية التي تلزم لزوماً مباشراً عن نظرية قد برهن عليها وبذلك تكون الهندسة قد عرضت على غرار القياس الأرسطي.

ولقد قسم اقليدس القضايا إلى مسائل وإلى نظريات تتناول خصائص الأشكال وقد ميز بينهما بأن وضع في نهاية تناول المسألة الحروف .Q. E.F التي هي اختصار للعبارة اللاتينية Quod Erat Faciendum وهو المطلوب عمله، . وفي نهاية تناول النظرية الحروف Q. E. D. التي هي اختصار للعبارة اللاتينية Quod Erat Domonstradum أي وهو المطلوب البرهنة عليه.

وأن التمييز بين المسائل والنظريات مسألة نوقشت قبل اقليدس . فبول تانزيري يذكر أنه في عصر أفلاطون ، وربما أيضاً في عصر إقليدس ، ناقش بعضهم بدقة وبالتفصيل مسألة هل يجب أن نفحص القضايا الرياضية كمسائل تحتاج الى حل أو على العكس كنظريات تحتاج إلى البرهنة عليها ؟ .

لقد اختلف اليونانيون إذن حول القضايا الهندسية وطريقة البرهنة عليها . فإذا كان جميع الرياضيين اليونانيين قد اتفقوا على السير الذي يجب أن يتبع فهناك اختلاف في الاتجاه الذي ينبغي أن يسير فيه البرهان . وما يراه المثاليون الحدسيون من الأفلاطونيين ، لا يراه التعليميون المنطقيون والعكس وبالعكس .

ويصف بروقلس في تعليقه على الجزء الأول من كتاب الأصول مناقشة هذا الموضع على النحو التالي : « لقد كانت الأشكال وخصائصها في نظر الأفلاطونيين ، من أمثال سبيسيب Speusippe (القرن الرابع ق . م) وأمفينوم وجيمينوس Gemiuns (القرن الأول ق . م) موجدة على نحو سابق في عالم الأفكار المثالي ، مستقلة عن الانشاء الذي يقيمه الرياضيون» ، وهذا الانشاء لا يقوم إلا بإظهار ما كان موجوداً سابقاً ، للحدس ، فمثلاً تكون المثلثات المتساوية الأضلاع موجودة ، كما هي بالتعريف الذي يقرر علاقة أبدية بين الأفكار ، وإن واقعة انشائها لا يمكنها أن تضيف شيئاً إلى وجودها أو تحذفه .

فليس هناك إذن مسائل ، ولكن هناك فقط نظريات ، هي موضوعات للتأمل . وكان هناك بعض الرياضيين ، كرياضيي مدرسة مينيخموس يعتبرون جميع القضايا مسائل ، وهناك آخرون من مدرسة

كاربوس Carpos الميكانيكي يساندون أيضاً المسائل ، ويرون أن جنس المسائل يسبق جنس النظريات ، لأن المسائل توصلنا إلى معرفة الموضوعات التي تنسب إليها الخصائص المدرسة .

وهناك أخيراً كثيرون يعتبرون أن النظريات هي التي لا تتضمن إلا مكاناً واحداً . وأن المسألة هي التي قد تقبل وقد لا تقبل إمكانيات متنوعة . فاقتراح رسم زاوية قائمة في نصف دائرة هو نظرية لأن جميع الزوايا المرسومة في نصف الدائرة تكون قائمة بينما يكون اقتراح رسم مثلث متساوي الأضلاع في دائرة هو مسألة لأننا لا نستطيع أن نرسم داخلها مثلثاً آخر يكون متساوي الأضلاع .

وهذا اختلاف يرجع فيما يقول بروقلس إلى اختلاف وجهات نظر القائلين بالعلم المثالي والقائلين بالعلم التعليمي فإذا كان فيثاغورث وأفلاطون وأتباعهما حدسيين يهتمون بالأمور المثالية فعلى العكس كان المنطقيون الخلص يشغلون قبل كل شيء بالهيكل التعليمي للعلم الرياضي . ولكنهم لا يختلفون مع الحدسيين حول مصدر هذه الأفكار الرياضية ويرجع السبب في أن الأفلاطونيين ينسبون التفوق إلى النظريات لظنهم ـ فيما يقول بروقلس ـ إن هذا الاصطلاح يناسب بدرجة أكبر مسائل العلوم النظرية التي تعالج الحقائق الأبدية التي لا تتوالد ، وليس هناك مكان إذن للمسائل التي يتعلق الأمر فيها بأن ينتج المرء شيئاً كما لو لم يكن موجوداً من قبل .

ونستطيع التوفيق بين المدرسة الحدسية والمدرسة المنطقية قائلين أن الحقائق الرياضية ليست إلا نظريات ، طالما كان العلم مدركاً على نحو مثالي ، ولكنها تكون معروضة على صورة مسائل بالنسبة

للعقل الذي يحصل عليها تدريجياً وأن الحدسيين والمنطقيين لم يختلفوا إلا في وجهات النظر التي اختلفت بمقتضاها آراؤهم عن طبيعة الحقائق الرياضية وطبيعة القضايا التي تعبر عنها . وما دامت الأشياء تعرف بضدها فلا بد من وجود المسائل إلى جانب النظريات .

وسواء تعلق الأمر بمسائل تحتاج إلى حل أو نظريات تحتاج إلى برهان كان على إقليدس أن يلجأ إلى تلك المناهج التي بدأ أفلاطون بتحديد مراحلها بكل دقة وعناية . وقبلها الرياضيون الذين كانوا يفككون الكل المعقد ، بواسطة التحليل ، إلى قضايا أكثر بساطة قبلت سابقاً أو سبق البرهان عليها . كما كانوا يشيدون بتركيب الحقائق الهندسية المراد البرهنة عليها ابتداء من القضايا الابتدائية .

وإذا تصفحنا كتاب الأصول وجدنا نمطاً معيناً تتخذه جميع المسائل الهندسية ، ولهذا النمط فيما ذكر«زيتن» ثمانية أجزاء هي :

١ ـ المقدمة الأولى ، أو المنطوق ، وهي تدل على معطيات المسألة وما هو المطلوب .

٢ ـ المعطي أو تكرار المنطوق مطبقاً على شكل معين .

٣ ـ المطلوب وهو الذي يحول المسألة المقترحة إلى مسألة أخرى أكثر بساطة .

٤ ـ التحليل وهو يبين إمكانية حل المسألة الأكثر بساطة بواسطة معطيات منطوق المسألة المقترحة ، وذلك عن طريق تحليلها إلى ما هو أبسط منها .

٥ ـ التقسيم وتتحدد به الشروط التي عندما تتحقق تكون المسألة ممكنة الحل .

٦ ـ العمل : وهو يكمل المعطي بتحديد الخطوط المختلفة الإضافية التي يجب مراعاتها لتقييم البرهان .

٧ ـ البرهان : وهو يستنبط من العمل الشكل المطلوب .

٨ ـ النتيجة : وهي تؤكد أن هذا الشكل يحقق تماماً الشروط المطلوبة .

ويتضمن نمط المسألة عدداً كبيراً من المتغيرات أو الصور الجزئية للمسائل التي يجب أن نطبق عليها أنواعاً مختلفة من البرهان ، مثل التحليل الخالص بنوعيه : المبرهن للحل Poristique والهادف إلى الحل Zététique والتركيب الخالص وبرهان الخلف بالرد إلى المحال وغير ذلك .

ويلاحظ «زيتن» أن التحليل المتضمن في الأجزاء ٣، ٤، ٥ ضروري من الناحية المنهجية لاكتشاف الحل . ولكنه يصير غير ضروري عندما نقدم بعرض ما اكتشفناه ولما كان هذا الغرض هدف الرياضيين اليونان سرعان ما تخلوا عن التحليل ولم يعد عرضهم يتضمن إلا الأجزاء ١ ، ٢ ، ٦ ، ٧ ، ٨ . وبذلك كان عرضهم يتصف بأنه تركيبي .

وتتخذ النظريات بمقتضى طبيعتها شكل العرض التركيبي الذي يفضل على الشكل التحليلي . ومع ذلك فإن النظريات قابلة للبرهان مضاد antitnetique يقوم على التحليل . فنفترض أن النظرية المقترحة باطلة وأن نقيضها صادق ثم نفحص : هل النتائج المستنبطة من هذا الافتراض مقبولة ؟. وبمقتضى النتيجة المكتشفة يحكم بصدق النظرية أو بطلانها فإذا كانت النتيجة غير متفقة مع معطيات المسألة أو

مع ما هو معروف ومقبول من قبل فالفرض يكّون كاذباً والنظرية تكون صادقة والعكس بالعكس .

وكل نظرية يبرهن عليها تفيد في البرهان على النظريات التالية . كما تفيد المبادىء ، وأعني التعريفات والمسلمات والبديهيات . ولنلاحظ هنا مع بول تانيري نقلاً عن بروقلس أن أصطلاح الأصول ينطبق على هذه النظريات التي هي بمثابة مبادىء للنتائج ، والتي تطبق في كل مكان ، وتقدم لنا براهين على علاقات ذات أعداد عظيمة .

وعلى ذلك فإن أصول اقليدس تلعب في نفس الوقت دور الغاية ودور الوسيلة ، فهي غاية لأنها تعرفنا النظريات الهندسية الهامة والأكثر جمالاً . وهي وسيلة ، لأن الحلول الجاهزة التي تقدمها إلينا هي أدوات نستطيع بها أن نقيم برهاناً على نظريات جديدة ، فمصدر جمال البرهان قد اجتمعا هنا في عمل واحد بعينه .

أننا نجد في العلم الاقليدي نظرية عامة للأطوال وللحساب وقد تقاربت في هندسة اقليدس نظريات الهندسة المستوية والهندسة الفراغية والعلاقات العددية والمقادير غير المقاسة . وبعبارة أخرى تجسمت مادة منطق العلاقات في أصول اقليدس الذي كان كما يقول ليبنتز ، هندسياً ، ومنطقياً معاً ، أو حتى كما يقول برانشفيك هندسياً أكثر منه منطقياً ، أننا نكتشف في مبادئه ومناهجه تشابهاً عقلياً مع تحليلات أرسطو . ويبدو أن كون المنطق الصوري وأعني منطق الفئات . قائماً على أسس ثابتة . كان نبراساً لاقليدس يهديه حين خصص جزءاً من أصوله لمنطق الفئات ومنطق العلاقات. وإن كانت الهندسة الإقليدية لا تسير وفق ما يراه أرسطو الذي يختم دلالة المثلث

ويختم وجوده لكي ينطبق براهيننا عليه ، لأنه ينزل من الأنواع والأجناس إلى الأفراد وإلى المثلثات والمعطيات التجريبية . ولكن الهندسة لا تعبأ ولا تقيم وزناً للفرض الانتولوجي الذي هو نقيضه في المنطق الأرسطي .

فالهندسة قابلة لأن تمنح التعريفات الاسمية قيمة التعريفات الواقعية ، ومن ثم فهي شيء مغاير لأداة الاستدلال الصوري ، وبذلك أصبحت علماً حقاً . ومع ذلك نستطيع القول أن براهين الهندسة الاغريقية تعتمد دائماً على أفكار منطقية استاتيكية ثابتة ، لأنها تتجنب الالتجاء إلى اعتبارات تصدر عن الحدس الحسي . ولا تأخذ بها على الرغم من وضوحها . ولذلك يبرهن اقليدس على أشياء واضحة وضوحاً حدسياً لا نزاع فيه . كما أن اقليدس يتجنب ما أمكن، إن لم يكن نقل شكل، فعلى الأقل أن يجعله يلف حول نفسه ، بينما يرى المحدثون أن هذه العملية صحيحة ومشروعة ، وأنها تسمح ببرهنة أكثر سرعة وأكثر سهولة . وبذلك يحتفظ برهانه مثلاً على تساوي زاويتي قاعدة المثلث المتساوي الساقين وتساوي الزوايا المتبادلة والمتناظرة بطابع استاتيكي يتفق تماماً مع مطالب المنطق .

وهذا الكلام يصدق أيضاً على جميع الحالات التي نقوم فيها بنقل شكل ووضعه على شكل آخر لنقوم بالمقارنة بينهما على نحو مباشر ، فاقليدس يتجنب النقل ويفضل القيام بانشاء شكل آخر بمقتضى الشروط المعطاة في المنطوق ، وربما كان السبب في هذا التجنب يرجع إلى الخوف من الوقوع في مغالطات زينون الخاصة بالحركة واللانهاية . وهذا السبب نفسه هو الذي جعلهم يتجنبون في

عمليات تكاملهم الاستخدام المباشر اللامتناهي العددي مع أنه كان لديهم ، منذ أبو لونيوس ومؤلفاته ، العناصر الجوهرية التي تسمح بأن ترتفع إلى اللامتناهي الهندسي . وهم بذلك قد ظلوا مخلصين لفكرة أرسطو التي بمقتضاها يكون المكان الواقعي ، وبالتالي المكان الهندسي ، منتهياً ، ومن ثم فإن إدراك النقط والخطوط والسطوح ممتدة إلى ما لانهاية ليس غامضاً من وجهة نظر المنطق ولكنها مضادة للتجربة ، ولذلك لم يستطع المرء أن يثير اللامتناهي الهندسي ، وأن يجعل منه نقطة بداية لمناهج جديدة . وكان لا بد من أن تلجأ الهندسة الأغريقية - لأنها لم تحاول أن تسير في هذا الاتجاه ، ولأنها ظلت مخلصة لمثالها المنطقي - إلى نوع معقد من البراهين التي ينتهي نسقها بأن يربك تسلسل النظريات . وعندما أدخل ديزاراج Desargues اللامتناهي الهندسي في القرن السابع عشر على نحو صريح ومباشر أتى بتسهيلات للبراهين أدهشت المحدثين من كبار الهندسيين .

ونختم كلامنا عن الهندسة الاغريقية قائلين أن روحها ومناهجها تتميز بالإلتجاء إلى مثال عقلي ومنطقي يتصف بالأمرين الآتين :

١ ـ وضع قضايا أولية ، سواء كانت تعريفات أو فروضاً تكون منطقية ما أمكن وقليلة العدد بقدر المستطاع .

٢ ـ أن يقوم بناء الرياضيات كله على هذه القضايا التي تكون بمثابة أسس للبناء ، الذي يتم بواسطة الاستنباط العقلي .

وبذلك نحافظ على الدقة المنطقية، ولكن كان على حساب بساطة الحسابات والبراهين ، بحيث لم تسمح التعقيدات بأن تظهر لنا عمومية مناهج الاكتشاف والبرهان .

٣ ـ تطور المنهج الرياضي بعد إقليدس :

لننتقل الآن إلى دراسة التطورات التي لحقت بالمنهج الرياضي بعد أن اكتمل ، أو على الأقل ، بعد أن اتضح على يد إقليدس ، وإذا كنا قد أهملنا دراسة المنهج الرياضي المطبق في الحساب عند اليونان ، لأنه لم يتضح في أيامهم ، فإنه ينبغي ألا نهمل هذا التطبيق الهام للمنهج الذي تبلور فيما بعد ، ولذلك أفضل أن أتناول أولاً تطور المنهج الرياضي المطبق في الهندسة ثم أتناول ثانياً تطور المنهج الرياضي المطبق في الحساب .

أولاً : تطور منهج الهندسة بعد إقليدس :

عرفنا في الفصل السابق أن إقليدس لم يكن ، على وجه التحديد واضح المنهج الذي اتبعه في كتاب الأصول ، وأنه لم يكن مكتشف جميع النظريات التي عرضها فيه ، وأنه كانت هناك كتب سميت بهذا الاسم قبل بداية القرن الثالث قبل الميلاد . وأن اقليدس قد استفاد من هذه الكتب عندما وضع منهجه . ولكنه اشتهر بمحاولته أن يشتق جميع الاكتشافات السابقة من عدد قليل نسبياً من الأفكار والمسلمات إلى جانب بعض التعريفات .

وعرفنا أن الأفكار العامة هي قضايا لا تخص علماً معيناً ، بل تشترك فيها جميع العلوم ، وإن مسلمات اقليدس هي قضايا تخص الهندسة ، وعلينا أن لا نسلم بها في بداية هذا العلم ومع أن القضايا العامة أو الأساسية قد تعرف بالبديهيات إلا أن هذا الاسم قد استخدم فيما بعد ليدل على البديهيات والمسلمات معاً دون تمييز . وقد ذكرنا أن مسلمات إقليدس تعرضت لنقد اليونانيين أنفسهم لتضمنها لحشو

أو لانطوائها على غموض ولأن بعضها من الممكن في نظر بعضهم أن تشتق من غيرها ، فلم تحقق شرط الاستقلال . كما انتقد منهج إقليدس لأنه يفترض قضايا هندسية لم تكن موضوعة بين بديهيات أو مسلمات ، ولم يبرهن على أنها تشتق من غيرها . وليس هناك شك في أنه أراد أن يضع كل افتراضاته غير المنطقية في البداية ، وإن يشتق منها النظريات بواسطة المنطق وحده . وكل ما هو خلاف ذلك لا يتفق مع رغبته في الدقة المنطقية الواضح أثرها خلال عمله . ومع أن الأشكال مسموح بها في الهندسة ، لأنها قد تساعدنا على تركيز الانتباه ، عندما نحاول أن نتبع برهاناً ما ، ولأنها قد تكون ضرورية من الناحية السيكولوجية في عملية الاكتشاف إلا أنه من غير المسموح ونحن نتأمل شكلاً أن نتقبل قضايا لمجرد كونها واضحة بالنسبة لنا . لأن في ذلك إضافة إلى البديهيات ، دون أن نلفت النظر إلى ذلك ، وهذا على عكس روح الهندسة الاغريقية .

لقد أكد إقليدس وتابعوه حتى القرن الماضي أن مسلماته حقائق كلية وضرورية عن المكان الفيزيقي ولذلك فهي صادرة عن المادة ، وقد سبب لها أصلها التجريبي والمادي غموضاً وتعقيداً ، وهناك مسلمة من بينها بدت دائماً أكثر تعقيداً من باقي المسلمات . وهذه المسلَّمة هي مسلمة التوازي . فاقليدس بعد أن أقرَّ أن الخط المستقيم من الممكن أن يمد إلى ما لانهاية ، قد سمي المستقيمين بالمتوازيين، إذا امتدا إلى ما لا نهاية دون أن يتقابلا أبداً. وإن كنا لا نقوم بتجربة الامتداد إلى ما لا نهاية فعلاً . وقد استنتج إقليدس من هذه المسلمة الخامسة الخصائص الآتية :

١ ـ من نقطة لا يمكن أن نرسم إلا موازياً واحداً لمستقيم معلوم .

٢ ـ مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين .
٣ ـ هناك أشكال مشابهة لشكل معلوم .

ويستخدم اقليدس المسلمة الخامسة لأول مرة عند البرهنة على القضية التاسعة والعشرين من الفصل الأول من كتاب الأصول . ومنطوق هذه القضية : إذا وقع الخط المستقيم على خطين متوازيين صارت الزاويتان المتبادلتان متساويتين ، وصارت الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المناظرة لها ، وصار مجموع الزاويتين الداخليتين مساوياً لقائمتين ، ويستخدم إقليدس أيضاً في البرهنة على هذه القضية تعريفه للخطين المتوازيين بأنهما الخطان المستقيمان المشتركان في سطح واحد ولا يلتقيان مهما امتدا في أي من جهتيهما . وقد برهن إقليدس بالاعتماد على القضية ٢٩ القضايا التي يتألف من مجموعها ما يعرف باسم نظرية التوازي وغيرها من القضايا العامة ، ومنها القضية القائلة أن مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين وإن كان منطوقها لا يوحي بأنها تتعلق بالخطوط المتوازية .

وقد حاول الرياضيون أن يتغلبوا على الصعوبات التي واجهتهم بها المسلمات الخامسة . وقد اتجهت المحاولات إلى البرهنة عليها بواسطة الثمانية والعشرين الأولى ومثل هذا البرهان ـ إذا كان ممكناً ـ لا ينطوي على دور . وفي هذه الحالة تصير المسلمة الخامسة قضية كسائر القضايا التي يستنبطها إقليدس من مسلماته ومن قضاياه المبرهنة ، ويقل مجموع المسلمات بمقدار مسلمة واحدة .

وقد اتجهت محاولات أخرى إلى وضع تعريف جديد للتوازي غير التعريف الذي أخذ به إقليدس . ولما لم يكن أي من هاتين المحاولتين موفقاً فقد حاول آخرون أن يبتكروا مسلمة جديدة لا تتعرض لما

تعرضت له مسلمة إقليدس من اعتراضات تستخدم في البرهنة على المسلمة الاقليدية . ويعد ذلك تمضي في البراهين الهندسية التالية كما يمضي إقليدس. وهناك هندسيون آخرون حاولوا أن يخدموا مسلمة إقليدس دون أن يقدموا مسلمة جديدة ، وقد اعتبروها نظرية من الممكن أن يبرهن عليها بالاستنباط من المسلمات، وحاول بعضهم البرهان على أن مسلمة إقليدس مسلمة مستقلة ، لأنها تنتج حتى عن نفيها ، وقد فشلت جميع هذه المحاولات ، وقاد فشلها وعقمها النسبي إلى فكرة إمكان وجود هندسيات ممكنة منطقياً ، لا تقبل فيها وحدة الموازي المرسوم من نقطة معلومة ، وبالتالي لا نقبل فيها مسلمة التوازي .

أما كلود بطليموس Ptolemée (القرن الثاني الميلادي) وبروقلس (٤١٠ - ٤٨٥ م) فقد حاول كل منهما أن يبرهن على أن هذه القضية يجب ألا تظهر كمسلمة ، لأنه من الممكن أن يبرهن عليها كنظرية . ويقول جودود أن بروقلس هو أول من حاول تلك البرهنة. ولكني لا أوافقه على ذلك ، فهذه المسلمة كانت هدفاً لنقد الرياضيين منذ أعلنها إقليدس وقد أوضح بروقلس الاعتراضات التي وجهت إليها وملخصها أن المسلمة الخامسة ليست مسلمة(بمعنى الكلمة ، فهي ليست من القضايا التي يجوز التسليم بها دون برهان لأنها تنطوي على صعوبات ويستشهد بروقلس بمحاولة بطليموس الفلكي في البرهنة على هذه القضية التي لم تكن موفقة في نظر بروقلس لأن نقص الزاويتين الداخليتين يستلزم تقارب الخطين المتوازيين ولكنه قد لا يستلزم تقابلهما . فهناك خطوط تتقارب باستمرار دون أن تلتقي ، ولذلك لا بد من أن نبرهن على أن الخطوط المستقيمة

ليست من هذا النوع . وعلى ذلك فالمصادرة الخامسة هي مجرد فرض راجع الصدق . ولكن رجحان الصدق لا يكفي للإقناع في علم الهندسة ولذلك لا مفر من البرهنة عليها .

وبالفعل صاغ بروقلس برهاناً جديداً في شرحه المذكور بعد أن بين وجوه النقص التي رآها في برهان بطليموس. ولكن محاولة بروقلس هذه لم تكن الأخيرة . قد أدرك الرياضيون اللاحقون من العيوب في برهان بروقلس مثل ما أدرك في براهين السابقين .وكان لا بد من أن يحاولوا من جديد ما حاوله هو من قبل ، واستمرت المحاولات على هذا النحو في العالم القديم . ثم انتقلت إلى العالم الإسلامي بعد ترجمة كتاب الأصول إلى اللغة العربية في نهاية القرن الثاني الهجري (أي في نهاية القرن الثامن الميلادي) حيث حاول نصير الدين الطوسي (١٢٠١ ـ ١٢٧٤ م) أن يبرهن عليها، وكان أول من لاحظ أن المسلمة الخامسة وكافة القضايا القائلة بمساواة مجموع زوايا المثلث لقائمتين . ثم انتقلت محاولة البرهنة إلى العالم الأوروبي ، حيث استؤنف في بداية القرن السابع عشر ، فقد حاول كاتالدي Cataldi في حوالي سنة ١٦٠٠ ، وبعد ذلك جيوردانو فيتا Girdano vitale (١٦٣٣ ـ ١٧١١) البرهنة على المسلمة بدراسة موقع النقط المتساوية البعد عن مستقيم معلوم، وقد قبل ضمنا أن هذا الموقع مستقيم . وقد بين جون واليس J. Wallis (١٦١٦ ـ ١٧٠٦) أن مسلمة إقليدس من الممكن البرهنة عليها إذا قبلنا وجود مثلث مشابه لمثلث معلوم له أضلاع ذات أطوال تعسفية .

وقد ظهرت في القرن الثامن عشر محاولة جديدة لها أهمية خاصة ، أدت إلى نتائج غير متوقعة . وصاحب هذه المحاولة هو

الأب جيرولامو ساكيري Gerolamo Saccheri (١٦٦٧ - ١٧٣٣) التي جـاءت في كتابـه Euclides abomni Naevo vindicatus المنشور سنـة ١٧٣٣ .

وقد تميزت هذه المحاولة بشيئين : استقصاء البحث واستخدام برهان الخلف . كان ساكيري يؤمن ، كغيره ، بصدق المسلمة الخامسة ، ولكنه شعر كما شعر الكثيرون بضرورة البرهنة عليها . وقد أقام هذه البرهنة - كما يقول هو نفسه - على مبدأ النتيجة المدهشة الذي استخدمه في كتابه البرهان المنطقي Logica demonstrativa ، أعني أنه اعتمد على برهان الخلف ، الا أن ساكيري لم يبدأ بافتراض كذب المصادر نفسها ، بل افترض كذب قضية أوحى بها شكل من أشكال إقليدس ظهر في طبعة كلافيوس ، وذلك ليثبت أن المسلمة قضية ضرورية تصدر حتى عن نفيها . ولم يؤد به ذلك الفرض إلى تناقض إلا بعد أن برهن على عدد كبير من القضايا المخالفة لما يناظرها عند إقليدس . ولكن سرعان ما أظهر البحث فيما بعد أن ذلك النسق الذي أقامه ساكيري على القضية التي اعتقد كذبها كان خالياً من كل تناقض . ويترتب على ذلك ضرورة التسليم بإمكان قيامة لنظرية هندسية تخالف قضاياها قضايا الهندسة الاقليدية ، لها ، كما للهندسة الاقليدية حق الوجود ما دامت غير متناقضة ، وكان ساكيري بذلك أول مكتشف للهندسات اللاأقليدية .

لقد وضع ساكيري في بـرهانـه ثلاثـة فروض بمقتضـاها تكـون الزاويتان الداخلتان المتساويتان قـائمتين أو منفرجتين أو حـادتين . وفي الحالة الأولى يكون مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين ، ومن ذلك نستطيع أن نستنتج مسملة إقليدس . ومعنى ذلك أن الفـرض

الأول يؤيد الهندسة الاقليدية . والباقيان يؤيدان هندستين لا إقليديتين ، عرفا فيما بعد بالهندسة التقديرية . وهندسة القطوع الزائدة . وقد بين ساكيري في مجرى بحثه خصائص هاتين الهندستين . فقد بين في القضية أكبر من قائمتين ، ويكون في حالة كونهما حادتين أقل من قائمتين . ولكن هذه النتيجة الأخيرة متناقضة مع إمكان مد المستقيم إلى ما لا نهاية . وقد أضاف ساكيري ملاحظة هامة هي أنه إذا كان مجموع زوايا المثلث مساوياً لقائمتين بالنسبة لمثلث فإن ذلك يصدق على جميع المثلثات .

ولم يوفق ساكيري في البرهنة على مسلمة التوازي بفحص الفرضين المتمايزين اللذين يعتبران بقيا لها . وما وصل إليه من تناقض ، سواء في القضية ١٢ في حالة انفراج الزاويتين، أو في القضية ٢٣ في حالة افتراض كون الزاويتين حادتين ، إنما هو نتيجة خلل أو خطأ في البرهان . ومع ذلك فإن ساكيري كان أول من تصور هندسة متطورة تراعي قواعد المنطق على الرغم من أن مجموع زوايا المثلث فيها يكون أكبر أو أقل من قائمتين .

وقد شكك الرياضيون تحت تأثير محاولة ساكيري في إمكان البرهنة على مسلمة التوازي . فاتجهت الأبحاث وجهة جديدة . وحاول الرياضيون استقصاء كل الإمكانات التي فتح ساكيري الطريق إليها . وقد وصل الرياضي السويسري لامبرت Lambert (١٧٢٨ - ١٧٧٧) بدراسة شكل رباعي فيه ثلاثة زوايا قوائم وافتراض كون الزاوية الرابعة قائمة أو منفرجة أو حادة إلى نفس النتائج التي وصل إليها ساكيري . واستطاع أن يضيف عدداً كبيراً من

القضايا إلى ما سبق استنبطه ساكيري من افتراض كذب المسلمة الاقليدية .

وقد اشتغل بمسلمة أقليدس أيضاً الهندسيون الفرنسيون من أمثال لاجرانج Lagranga (١٧٣٦ - ١٨١٣) ولابلاس Laaplace (١٧٤٩ - ١٨٢٧) ولوجاندر Legendre (١٧٥٢ - ١٨٣٣) وكارنو Carnor (١٧٥٣ - ١٨٢٣) ، وفوربيه Formier (١٧٦٨ - ١٨٣٠) .

وقد استطاع لوجاندر أن يبرهن . دون أن يستخدم مسملة التوازي ، على أن زوايا المثلث تساوي بحد أقصى قائمتين ، وقد قبل ضمناً في برهانه أن المستقيم من الممكن مدة إلى ما لا نهاية . وقد أخذ البحث ينأي شيئاً ،فشيئاً عن محاولة البرهنة على مصادرة إقليدس أو على قضية مكافئة لها ، وسار في طريق مستقل عن هذه المسلمة .

وكان جاوس (Gauss) (١٧٧٧ - ١٨٥٥) أول من تحقق من إمكانية تطوير الهندسة غير الاقليدية دون أي تناقض. وأول من سمى هذه الهندسات المخالفة لهندسة أقليدس بالهندسات ضد الاقليدية ، كما كان أول من أعلن الاعتقاد باستحالة البرهنة على مسلمة أقليدس . ولكن هذه الاستحالة لم تثبت بالبرهان إلا على يد بترامي Betrami سنة ١٨٦٨ وعلى يد هويلHouel سنة ١٨٧٠ .

وأول عمل مطبوع في الهندسة اللاأقليدية هو عمل الرياضي الروس نيقولاي لوبا تشكفسكي Lobatchevsky (١٧٩٢ - ١٨٥٦) وهو يتناول فرض الزاوية الحادة ، أعني هندسة القطوع الزائدة ، التي فيها يكون هناك خطان يمران بنقطة ويكونان موازيين لمستقيم

معلوم ويصف بوانكارية ما قام به لوبا تشفسكي بقوله « لقد افترض منذ البداية أنه من نقطة معلومة يمكن أن نرسم عدة متوازيات لمستقيم معلوم.. وقد احتفظ فضلاً عن ذلك بجميع بديهيات إقليدس الأخرى ، واستنتج من هذه الفروض سلسلة من النظريات من المستحيل أن نكشف بينها أي تناقض ، وقد أقام هندسة ، منطقها المنزه عن الخطأ لا يخضع شيء منه لمنطق الهندسة الإقليدية » ويضيف « ومن المفهوم أن تلك النظريات مختلفة جداً عن النظريات التي تعودناها ، وهي تبلبل الفكر قليلاً في البداية . ومن ذلك مجموع زوايا المثلث هو دائماً أقل من قائمتي . وأن الاختلاف بين هذا المجوع والقائمتين متناسب مع سطح المثلث ، ومن المستحيل أن نشيد شكلاً .مشابهاً لشكل معين ، ولكن بأبعاد مختلفة » ، ويختتم بوانكارية كلامه عن هذه الهندسة بقوله : ان قضايا لوباتشفسكي ليس لها علاقة بقضايا اقليدس ، ولكنها لا تقل عنها في اعتماد بعضها على بعض بطريقة منطقية .

لقد قبل لوبا تشفسكي ما هو نقيض إحدى لوازم مسلمة إقليدس الثلاث ، التي ذكرتها ، أعني أنه قبل أنه يمكن أن نرسم من نقطة معلومة عدة مستقيمات موازية لمستقيم معلوم واحتفظ بجميع مسلمات وبديهيات إقليدس الأخرى ، وأقام عليها هندسة لا إقليدية مستنتجاً من هذه الفروض نتائج ، لا نستطيع أن نجد بينها ما هو متناقض مع ما قبل سابقاً مع أنها تختلف عن نظريات إقليدس . ومن الأمثلة على هذه النظريات النظرية القائلة : إن مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين ، وهذه النظرية تتعارض مع النتيجة الثانية لمسلمة التوازي ، وكذلك من المستحيل أن نشيِّد شكلاً مشابهاً لشكل

معين ، ولكن بأبعاد مختلفة ، وهذه النظرية تتناقض مع النتيجة الثالثة لمسلمة إقليدس الخامسة .

وما دام لوباتشفسكي قد رفض نتائج مسلّمة اقليدس الثالثة وقبل ما يناقضها يكون قد رفض مسلمة أقليدس نفسها . وبذلك لا ترجع القضايا التي يستنتجها لوبا تشفسكي من مقدمات وبديهيات أو مسلمات أقليدس الأخرى إلى الهندسة الاقليدية ، وليس لها علاقة بها ، ولكنها لا تقل عنها في تسلسلها المنطقي وتماسكها واعتماد بعضها على بعض اعتماداً منطقياً ، وبذلك فهي مشروعة ، فالمهم هو عدم تناقض النتائج مع ما قبل سابقاً .

وقد سار شفايكارت Schweikert (١٧٨٠ ـ ١٨٥٧) وتورينوس Tamrinus (١٧٩٤ ـ ١٨٧٤) وبولياس Bolyai (١٨٠٢ ـ ١٨٦٠) في هذا الاتجاه ، وتعتبر بحوثهم بحوثاً في الهندسات اللاإقليدية التي فيها تكون زوايا المثلث أقل من قائمتين . ولقد تابع بوانكارية هندسة لوبا تشفسكي مع إدخال تعديل بسيط على هذه الهندسة .

أما الهندسة التقديرية التي لا يكون فيها أي خط مرسوم من نقطة موازيا لمستقيم ، ويكون فيها للمستقيم طول محدد ، حيث أنه خط مقفل، فقد نشر الرياضي الألماني ريمان Riemann (١٨٢٦ ـ ١٨٦٦) آراءه في المحاضرة التي القاها سنة ١٨٥٤ ، بعنوان « عن فروض أية هندسة دون أسس » . ولم ينتبه الرياضيون إلى آراء ريمان وتلميذه كليفورد Clifford عن ءمكان استخدام الهندسة اللاإقليدية في الفيزياء إلا بعد مدة طويلة ويصف بوانكاريه هذه الهندسة بقوله « إن هندسة ريمان هي الهندسة الكرية الممتدة في ثلاثة أبعاد . ولكن الرياضي

الألماني اضطر أن يطرح جانباً ليس فقط مسلمة إقليدس ولكن أيضاً البديهية : لا يمكن أن نرسم بين نقطتين إلا مستقيماً واحداً . ويستمر بوانكاريه في توضيح هندسة ريمان قائلاً : « ولا يمكن أن يرسم غالباً بين نقطتين معلومتين على سطح كرة إلا دائرة كبيرة تلعب دور المستقيم ولكن هناك حالة شاذة ، فإذا كانت النقطتان متقابلتين على القطر فمن الممكن أن يرسم لا نهاية من الدوائر الكبير التي تمر بهاتين النقطتين . ويضيف : وبالمثل في هندسة ريمان (أو في إحدى صورها على الأقل) لا يمر بنقطتين غالباً ألا مستقيم واحد ولكن هناك حالات شاذة ، حيث من الممكن أن تمر بالنقطتين خطوط غير محدودة .

لقد أقام ريمان هندسة كرية ، أو بالأصح عدة صور لهندسة واحدة رفض فيها مسلمة إقليدس الخاصة بالتوازي ولذلك لا نجد في هندسة ريمان فكرة المتوازيات كما رفض بديهية أخرى تقول : لا يمكن أن نرسم الا مستقيماً واحداً يصل بين نقطتين وسبب رفض هذه البديهية عنده هو أنه يمكننا أن نرسم على سطح كرة لا نهاية من الخطوط بين نقطتين متقابلتين ما دام الخط قوساً مقفلاً . ولكن هناك حالة ثانية لا يمكن أن نرسم فيها بين نقطتين على سطح الكرة ألا مستقيماً واحداً هو دائرة، وذلك عندما تكون النقطتان غير متقابلتين ومن ثم تعددت الهندسات الريمانية والمهم أن ريمان أقام هندسة أو هندسات لا تتناقض فيها النظريات مع ما قبل في البداية من مسلمات أو بديهيات ويرى بوانكارية أن رسالة ريمان « عن فروض أية هندسة دون أسس» هي التي أوحت بمعظم الأعمال الحديثة التي من أهمها أعمال بلتزامي وهلمولتز .

وخلاصةِ القول لقد بذلت ـ عبثاً ـ محاولات كثيرة استمرت مدة طويلة للبرهنـة على مسلمة قليـدس . وأخيراً قـرر العالم الـروسي لوباتشفسكي والعالم المجرى بـولياي بـطريقة لا تـدحض أن هذه البرهنة مستحيلة . وقد خلصانا من مبتكري الهندسات التي لا تقوم على مسلمة في ذلك الحين لم تتلق أكاديميات العلوم إلا برهاناً أو برهانين في السنة . ولقد أوحت رسالة ريمان إلى بلترامي وإلى هويل ببرهانيهما اللذين أكدا لنا بصفة نهائية أن هذه البرهنة مستحيلة .

ولقـد كـان لهـذه المحـاولات التي أدت إلى قيـام الهنـدسـات اللاإقليدية نتيجة إيجابية إلى جانب نتيجتها السلبية. فقد برهن على استقلال مسلمة التوازي عن غيرها من المقدمات التي وضعها إقليدس ، بمعنى أنه في إمكان المرء من الناحية المنطقية أن يـأخـذ بهذه المقدمات بدون أن يضطر إلى الأخذ بمسلمة التوازي . وهذه الحقيقة هي التي أدت إلى قيام الهندسات اللاإقليدية التي أدى قيامها مع كونها تتصف بأنها منطقية ومشـروعـة إلى التسليم بأن مسلمات الهندسة هي التعبير الممكن الوحيد عن الوقائع الفيزيقية ، فلو كانت المسلمات الإقليدية حقائق ضرورية وكلية لما استـطعنا أن نتصـور غيرها ، ولما امكننا أن نقيم على نفيها هندسات غير إقليدية لا تناقض فيها. فقيام هذه الهندسات برهن، إذن، على أن مسلمات الهندسة الإقليدية هي مجرد فروض . إذا قبلناها قبلنا الهندسة الإقليديـة ، وإذا قبلنا غيرها قبلنا هندسات لا إقليدية . ومع ذلك فنحن نفضل مسلمات الهندسة الإقليدية لأنها أكثر بساطة ، ولأنها تعبر عن الوقائع الفيزيائية بلغة سهلة ، في حين أن تعبير الهندسات الأخرى قد يكون أكثر تعقيداً أو أقل سهولة وبساطة . فالهندسات كلها تعبيرات متساوية

في الصدق ، ولكنها تتفاضل في درجة الملاءمة وفي درجة بساطة التعبير عن الواقع .

هذه هي التطورات التي حدثت في الهندسة ، وهي تطورات هامة جداً بالنسبة لنا ، لأنها توضح لنا اتجاه المنهج المتبع في الهندسة إلى الناحية المنطقية الصورية الصرفة ، وقد لفتت هذه التطورات أنظار المنطقيين إلى الأكسيوماتيك الحديث ، وأعنى نظرية انساق المسلمات أو البديهيات، فدرسوا خصائص تلك الأنساق وعرفوا أنهم إذا وصلوا إلى تناقض في أي نسق يقوم على نفي مسملة إقليدس مع الاحتفاظ بباقي المسلمات ، فإنهم يكونون قد برهنوا ببرهان الخلف ، على أن مسلمة التوازي تستنبط من المسلمات الأخرى وأنها لا تكون لذلك مسلّمة مستقلة . وقد تيقنوا من أن الفشل في كشف التناقض لا يكفي بذاته لأن يبرهن على عدم تناقض المسلمات اللاإقليدية ، لأنه من الضروري أن نبرهن على أنه من المستحيل أن نكتشف أي تناقض في أية لحظة، مهما تابعنا سلسلة الاستنباط. وهذا مطلب من العسير تحقيقه. إلا أن هذا البرهان قد اكتشف في القرن الماضي باكتشاف عدة طرق لتمثيل الهندسة غير الاقليدية بنسق إقليدي ولقد أثبت بلترامي عدم امكان وجود مثل هذا التناقض بين نظريات كل من هندستي ريمان ولو باتشفسكي وذلك بارجاع هاتين الهندستين ذوات البعدين إلى فرع من الهندسة العادية ، وبذلك فنّد الاعتراضات الموجهة إليهما ، ولقد تصور بلترامي في برهانه ، فيما يذكر بوانكارية شكلاً مرسوماً على نسيج مرن وغير قابل للإمتداد مثبت على سطح إقليدي ، وعندما يغير النسيج مكانه ويتشوه فإن الخطوط المختلفة للشكل يمكنها أن تغير شكلها ، دون

أن تغير طولها . وهي أن فعلت ذلك تركت السطح المثبتة عليه ، لأنها لا يمكنها الانتقال دون ترك السطح ، ولكن مثل هذه الحركة ، وتبعاً لذلك تغير الشكل والتشوه ، تكون ممكنة على سطوح التقوس الثابت ، وهي نوعان بعضها ذات تقوس موجب ، وهندسة هذه السطوح ترجع إلى هندسة كرية ، هي هندسة ريمان . وبعضها الآخر ذات تقوس سالب . وقد بين بلترامي أن هندسة هذه السطوح ليست إلا هندسة لوبا تشفسكي . وبذلك ظهر لنا اتصال هندستي ريمان ولوبيا تشفسكي ذوات البعدين بالهندسة الاقليدية . وعلى هذا النحو يختفي الاعتراض الذي يوجه إلى الهندسات ذات البعدين ويرى بوانكاريه أن حجة بلترامي من الممكن أن تمتد إلى جميع الهندسات اللاإقليدية التي ظهرت ، والتي من الممكن أن تظهر ، فيقول أنه من السهل أن يمتد استدلال السيد بلترامي إلى الهندسات ذات الأبعاد الثلاثة . وقد بين فليكس كلاين وآخرون أن الهندسة التقديرية وهندسة القطوع الزائدة ذوات الأبعاد الثلاثة من الممكن أن تمثّل بالهندسة الاقليدية .

من الممكن إذن أن نبرهن على أن قضايا الهندسة غير الاقليدية يستحيل أن تكون متناقضة ، إذا سلمنا بأن قضايا هندسة إقليدس غير متناقضة لأن الهندسة اللاإقليدية من الممكن تمثيلها ، كما بين بلترامي وفليكس كلاين وآخرون ، بهندسة إقليدية ، كما أنه من الممكن أن نترجم ، كما بين بوانكاريه عبارات وقضايا ونظريات الهندسة اللاإقليدية إلى عبارات وقضايا ونظريات هندسة إقليدس بواسطة قاموس لاإقليدي ، كما نترجم كتاباً باللغة الألمانية إلى اللغة

العربية بذلك يتأكد لنا أن تقدم الهندسة اللاإقليدية لا يودي إلى أي تناقض .

لأنه إذا قبلنا أي تناقض فى أية مرحلة فإننا سوف نقابله أيضاً في الهندسة الإقليدية .

لقد تبين لنا إذن أنه إذا كانت هندسة إقليدس غير متناقضة . فمن المؤكد أنه لن يكون هناك تناقض منطقي في نفس مسلمته الخامسة أو حتى في الجمع بين نفيها وباقي المسلمات الأخرى ، وهذا يساوي القول أن هذه المسلّمة مستقلة منطقياً عن باقي المسلمات . ولقد أدى تطور الهندسة اللاإقليدية إلى تغيير موقف الرياضيين إزاء الهندسة بما فيها هندسة إقليدس فما دام هناك عدة امكانيات كلها جديرة بالدراسة، فليست مهمة الرياضي إذن أن يقرر أو يثبت البديهيات بل مهمته أن يقرر أو يثبت ما ينتج منطقياً عن نسق البديهيات، إن البديهيات هي افتراضات يجب أن تصاغ على نحو واضح حتى ينفد برنامج إقليدس تنفيذاً دقيقاً من الناحية المنطقية وهذا ما قام به هيلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٣) في كتابه أسس الهندسة الذي نشره ١٨٩٩ حيث عرض الهندسة عرضاً صورياً ، تعتمد فيه العلاقة بين قضية تصدر عن قضية آخر صدوراً منطقياً على صورتيهما . أعني على بناء كل منهما كشيء مضاد لمادتيهما ولقد أصبحت الهندسة بعد هذا التحليل المنطقي الذي قام به هيلبرت علماً تشتق فيه النظريات من الأوليات اشتقاقاً منطقياً بمقتضى الصورة وحدها ، وبمقتضى قواعد المنطق ، حيث أن الحدس ـ فيما يقول المناطقة قد أقصى من الهندسة نهائياً . وما حققه هيلبرت يريد أن يحققه الرياضيون بالنسبة لفروع الرياضيات الأخرى ولم يرض الحدسيون عن ذلك ، فأخذوا

يندون بهذه الحركة محاولين أن يثبتوا أن الحدس ما زال له شأن كبير من الهندسة ومنهجها على الرغم من التجائها إلى الصورية .

هذه هي التطورات التي حدثت في الهندسة ومنهجها بعد إقليدس ،

ثانياً ـ تطور منهج الحساب :

لم يكن للحساب عند قدماء الشرقيين منهج واضح المعالم من الممكن أن يتصف بأنه منهج منطقي . وكانت طريقتهم في الاكتشاف والحل طريقة حدسية أدت إليها الدواعي العملية النفعية. ولم يكن منهج البابليين في الجبر منهجاً صورياً عاماً ، ولم تكن له دقة منطقية . وقد انتقلت هذه الطرق الحسابية إلى العالم اليوناني عن طريق الاتصال التجاري وغير التجاري .

ولم يطور اليونانيون منهج الحساب، ولم يهتموا به لأنهم أرجعوا المسائل الحسابية إلى مسائل هندسية ، ولكنهم مع ذلك قاموا بخدمة كبيرة للحساب ومنهجه عندما نبهوا إلى أن الاستدلالات لا تقوم على الأعداد الحسابية كما هي في الواقع المحسوس ، ولكنها تقوم على أعداد مثالية . وبذلك ميزوا بين علم الحساب كنظرية والحساب العددي أو اللوجستيقا المختلط بالاعتبارات العلمية والمادية. وهذا اتجاه مهد طريقه فيثاغورث ومدرسته . وأشاعه وأكده أفلاطون في محاوراته كجورجياس مثلاً والجمهورية .

ومع ذلك يضع اليونانيون للحساب منهجاً يشابه المنهج الهندسي الذي اتبعه إقليدس في أصوله ، بل جعلوا الحساب . وكذا الجبر، خاضعاً للهندسة ومنهجها، وكأنهم رأوا أن منهج الهندسة هو

المنهج الرياضي على وجه الكمال ولكنهم لم يبينوا إمكانية في تطبيقه في الحساب والجبر. وقد نتج عن جعل الحساب خاضعاً للهندسة وإخضاع الحدس الزماني للحدس المكاني أن اكتشف الفيثاغوريون الأعداد غير الماسة أو عدم قياسية القطر بجوانب المربع أو بعبارة اخرى لم يستطيعوا أن يقدروا طول قطر المربع الذي طول ضلعه يساوي الوحدة أو وتر المثلث الذي طول كل ضلعي القائمة يساوي الوحدة . فكل من القطر والوتر يساوي حسب نظرية فيثاغورث $\sqrt{٢}$. واكتشاف الأعداد الصماء هو الذي عاق الفيثاغوريين عن التقدم . فلم يستطيعوا أن يعالجوها معالجتهم للأعداد المنطقية أو الجذرية . وقد استطاع ايدوكسوس بنظريته في النسب أن يمكن الرياضيين من أن يعالجوا جميع الأعداد على نحو واحد سواء كانت صماء أو غير صماء .

ويربط تطور المنهج المطبق في الحساب بتطور فكرة العدد وتصوره. لقد توصل الإنسان إلى الأعداد الطبيعية، ومنها إلى الأعداد السالبة ، ثم ميز بين الأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية وبين الأعداد الصماء والأعداد الجذرية وبين الأعداد الواقعية وهي جذور الأعداد الجذرية الموجبة والأعداد الخيالية ، وهي جذور الأعداد السالبة غير الجذرية وأخيراً وصل إلى الأعداد الخيالية ، وهي جذور الأعداد السالبة غير الجذرية وأخيراً وصل إلى الأعداد المركبة في أعداد واقعية وخيالية. ومن الممكن القول إن فكرة العدد مرت في تطورها بخمس مراحل هي مرحلة الأعداد الطبيعية مرحلة الأعداد ذات الإشارات ، مرحلة الأعداد الجذرية مرحلة الأعداد الواقعية ، مرحلة الأعداد الجذرية مرحلة الأعداد الواقعية ، مرحلة الأعداد

المركبة . أما الأعداد الطبيعية فهي التي لا تقبل إلاّ الجمع والضرب حتى تكون دائماً في مجال الأعداد الطبيعية . وفي مجال الأعداد الصحيحة ذات الإشارات من الممكن أن يطبق الجمع والضرب والطرح دون القسمة ، التي ينقلنا تطبيقها إلى مجال الأعداد الجذرية ، التي تجذيرها ينقلنا إلى مجال الأعداد الواقعية أما تجذير الأعداد السالبة فينقلنا إلى مجال الأعداد الخيالية ، ويمكننا في مجال الأعداد المركبة أن نجري جميع العمليات بدون قيد أو شرط . وأن نطبق فكرة الدالة وقد اتسعت فكرة العدد واستخدمت الكلمة لتشمل أنواعاً مختلفة من الكيانات التي تجري عليها الحسابات وفقاً لقواعد التبديل والترتيب والتوزيع بشرط أن نقوم بتعريف مناسب للضرب والجمع ليمكن تطبيقها في جميع المستويات . مع ملاحظة أن هذا التطبيق لا يتم في كل مرحلة جديدة إلا بعد تقديم قواعد تبين الطريقة التي يجب أن تجري بها العمليات . ومعنى ذلك أن هذه العمليات تنطوي على بعض الغموض أو أنها تحدد على نحو مجرد بعض الشروط المنطقية التي يجب أن تراعيها عمليات أي حساب يجري على الأعداد .

لقد حدث تطور إذن في فكرة العدد ، حاول فيه الرياضيون أن يحافظوا على القواعد العامة للجبر ، وقد اضطروا إلى قبول ما هو جديد لكي يتغلبوا على المشاكل التي واجهتهم في المراحل التي وصلوا إليها من قبل . ولم يتأمل الرياضيون الجبر عن نحو مجرد إلا في القرن التاسع عشر . حيث قام بذلك رياضيون من أمثال بيكوك Beacock وجريجوري Gregory ودي مورجان كما حاول بعضهم ابتكار حسابات جديدة ، فنقد جراسمان مشروع ليبنتز في

الحساب الهندسي ، وحاول وليم هملتون اتمام حساب الأعداد فوق المركبة الذي حذف فيه قانون التبديل بالنسبة للضرب ليحتفظ بالقواعد الأخرى وبذلك كان للامتداد بفكرة العدد تصحيحات ببعض القواعد التي تحدد فكرة العدد ذاتها .

لقد أحدثت كل مرحلة من مراحل التطور شعوراً بعدم الارتياح لدى الرياضيين ، وكانت كل مرحلة ضرورية ، وما كان من الممكن تلافيها ، وقد قادت الاعتبارات المكانية التطور إلى الأعداد الواقعية على الأقل ، وحتى الأعداد الخيالية قد قبلت كموضوعات رياضية عندما ادمجت في نظرية الأعداد المركبة بتفسير مكاني ، ولكن عندما اكتمل التطور الرئيسي بدأت الشكوك تحوم حول الاعتماد على الحدس المكاني كأساس للتقريرات التي تتعلق باتصال الأعداد الواقعية . ولم تنشأ هذه الشكوك عن مشاكل من تطبيق الرياضيات أو تأثر لظهور الهندسات اللاإقليدية . ولكنها قامت من قلب الاكتشافات التي تمت في مجال التحليل الرياضي ذاته . فقد بين بولزانو Bolzano سنة ١٨٣٠ ثم بعد ذلك فاير ستراس Wex Istrass ، إن بعض الدوال المتصلة غير قابلة لأن تتكامل وهذه يعني باللغة الهندسية إمكان وجود منحنيات متصلة لا مماسات لها ، وقد أدى ذلك إلى متناقضات مثيرة .

وعندما حامت الشكوك حول الاعتماد على الحدس المكاني كمصدر للمعرفة الرياضية ، أصبح من الضروري أن يعاد فحص كل البراهين المقبولة لدى الجميع والشائعة الاستعمال وكانت النتيجة تشييداً جذرياً جديداً للرياضيات قام به رياضيون من أمثال كوشي Camchy (١٧٨٩ ـ ١٨٥٧) وفاير ستراس (١٨١٥ ـ ١٨٩٧) .

ومن الحق أن يقال: لم يكن هناك شيء في تحليل ما قبل القرن التاسع مبرهن عليه برهاناً مقنعاً وكافياً. ومنذ ذلك الحين أخذت الدقة في التحليل تتطلب كما تتطلب الدقة في الهندسة ، صياغة واضحة لكل تعريفات ضمنية للأنواع المختلفة من العبارات العددية ، وسواء كانت هذه الصيغ قواعد القوانين العامة للمنطق ، ويبدأ الاهتمام بصياغتها صياغة واضحة بعد التحقق من كونها أساسية .

ولكن هل كان من الضروري أن يكون هناك مثل هذه الصيغ ؟ أو هل هناك ضرورة متضمنة من مجرى التطور أجبرتنا على قبولها ؟ أو هل هي اتفاقات من صنعنا أوحى لنا بها اهتمامنا بوصف العالم ، أو رغبتنا في أن نضمن للرياضيات عمومية مجردة ، ولكنها غير قابلة للبرهان لأنها مجرد اتفاقات ؟

أن هذه أسئلة طرحت في القرن التاسع عشر وما زالت تناقض إلى اليوم ، ومهما يكن الأمر فإن أول خطوة هامة نحو تطبيق المنهج الرياضي في الحساب هي ضرورة صياغة الحسابات المختلفة التي عاشت معرفتها . وقد نفذت تلك الخطوة في القرن التاسع عشر .

لقد كان علينا في كل مرحلة من مراحل التطور أن نعالج كيانات من نوع جديد ، معرفة ضمنياً بقواعد إجراء الحساب الجديد . ولكن في استطاعتنا أن نتكلم في بعض السياقات عن الأعداد الصحيحة ذات الإشارات أو الأعداد الجذرية والنسبية ، دون أن نتكلم عن أعداد من نوع جديد غير الأعداد الطبيعية كما من الممكن أن نعتبر كل نوع من الإعداد أعداداً مختارة من النوع الذي يسبقه في التسلسل التطوري تنفرد بقواعد خاصة تجري عليها، لا سيما أن هاملتون قد بين سنة ١٨٣٥ أنه من الممكن عرض حساب الأعداد المركبة

كحساب لا لأزواج منظمة من الأعداد الواقعية بواسطة قواعد للمساواة والجمع والضرب وغيرها ، مبتكرة على نحو يلائم ذلك وإذا استطعنا أن نرد تلك الأعداد إلى ما يسبقها في التطور وأعني الإعداد الجذرية نكون قادرين على أن نقول مع برترندراسل أن جميع الأعداد التي من الأنواع العالية هي انشاءات منطقية للأعداد الطبيعية . وهذا بمعنى أنه لم يعد هناك ضرورة لأن تدخل الأعداد التي من الأنواع العليا ككيانات جديدة اكتشفت بواسطة الحدس المكاني أو بواسطة الاستمرار الزماني ، ما دام الكلام عنها سيكونه معادلاً لكلام أكثر تعقيداً عن الأعداد الطبيعية وخصائصها . وهذا البرنامج هو الذي يطلق عليه تحسيب التحليل .

ولقد سببت الأعداد الواقعية للرياضيين المحدثين ما سببته للمدرسة الفيثاغورية من مضايقات ، وذلك لأن حساب تلك الأعداد لا يمكن أن يحصر في مجال الأعداد الجذرية المنتهية . وذلك هو ما أدى قيام نظريتين هامتين عن الأعداد الواقعية : الأولى اقترحها فاير ستراس وطورها كانتور ، والثانية صاغها ديديكند Dedekind وقد أصبح من الممكن أن ننسب الأعداد الواقعية إلى الأعداد الجذرية التي تسبقها بمقتضى تعريف الأعداد الواقعية بواسطة المجاميع غير المنتهية للأعداد المنطقة . وهذا التعريف هو الذي وصل إليه كل من كانتور وديدكند ولكن ذلك لم يؤد إلى تحسيب التحليل بالمعنى الذي حدده كرونيكر Kronecker وأعني رد جميع القضايا الرياضية الحسابية إلى قضايا تخص الأعداد الطبيعية . وحتى إذا تخلينا عن برنامج الرد الكامل فما زالت لدينا مشكلة البرهان على عدم تناقض القواعد التي قلناها في حساب الأعداد الواقعية . وكيف نبرهن على

ذلك قبل أن نبرهن على وجود الأعداد التي تفرضها القواعد ؟ .

وعلى كل حال فإن هذه مشاكل تناولها الرياضيون في أواخر القرن الماضي وفي أوائل القرن العشرين . وقد سببت نزاعاً شديداً بين الرياضيين وتحول النزاع إلى مناصرة للمنطق ، الذي نستطيع به أن نستنبط بعض أجزاء التحليل من بعضها الآخر استنباط دقيقاً ، وإلى مناصرة للحدس الذي نستطيع به أن نستنبط بعض أجزاء التحليل من بعضها الآخر استنباطاً دقيقاً ، وإلى مناصرة الحدس الذي نستطيع به أن نبرر وجود الأعداد المعرفة . والذي نبرهن به على انساق القواعد المطبقة على الأعداد الطبيعية . ولا نستطيع أن نقدر أن المنطق قد انتصر على الحدس في ترك المعركة . فمن المعروف أن تحسيب التحليل لم يتم وأن فريجة وهو شيخ المناطقة لم يرض ، كما لم يرض كرونيكر ، رضاه ناماً عن نظريات الأعداد الواقعية التي شاعت في أيامه . وحتى لو تم هذا التحسيب فما زال للحدس ـ فما يقول الحدسيون ـ دور في نقط البدايات وفي البرهنة على عدم تناقض القواعد المستخدمة .

وعلى كل حال انقسم الرياضيون بعامة إلى مناصرين للمنطق ومناصرين للحدس وبعضهم يرى أن الرياضيات تقوم على المنطق والآخرون يرون أنها تقوم على الحدس . ولا يتسع المجال في هذه الدراسة المختصرة للإسهاب في هذا الموضوع ، لذلك نكتفي بهذا القدر آملين في دراسات أخرى ـ إن شاء الله ـ أن نوسع البحث في هذا الموضوع .

الفهــرس

إقليدس المجاري